

El Algoritmo de la Suma por Partes: Una Técnica Nueva para la Aceleración de Convergencia de Series

Juan R. Mosig † y A. Alvarez Melcón ‡

†Laboratory of Electromagnetics and Acoustics (LEMA), Swiss Federal Institute of Technology (EPFL), CH-1015 Lausanne, Switzerland

‡Universidad Politécnica de Cartagena, 30202 Cartagena, España

Abstract— Presentamos en esta contribución una técnica novedosa para acelerar la convergencia de series que aparecen con frecuencia en la resolución de problemas electromagnéticos. La técnica está basada en la aplicación recursiva de la integración por partes a secuencias discretas. Se demuestra que la técnica mejora grandemente las propiedades de convergencia de las series tratadas, y cómo realizando unas pocas operaciones algebraicas pueden conseguirse errores relativos muy pequeños. En la contribución la técnica nueva se aplica con éxito al cálculo eficiente de la función de Green en una guía de placas paralelas

I. INTRODUCCIÓN

En muchos problemas electromagnéticos, las cantidades importantes del problema (campo eléctrico y magnético, y potenciales auxiliares) se expresan en función de series infinitas que convergen muy lentamente. Este caso se produce, por ejemplo, cuando se analizan circuitos apantallados [1], antenas de cavidad [2], o incluso cristales fotónicos [3].

En estos problemas, la necesidad de evaluar numéricamente éstas sumas infinitas de lenta convergencia impide la creación de algoritmos eficientes para el análisis de las estructuras asociadas. Con el fin de solventar esta dificultad, varias técnicas numéricas de aceleración de convergencia han sido desarrolladas en el pasado [4].

A pesar de estos esfuerzos, el uso de éstas técnicas de forma fiable no es fácil, y siempre pueden encontrarse situaciones donde los algoritmos desarrollados no consiguen el pretendido efecto de aceleración de convergencia. En la presente contribución presentamos un nuevo algoritmo eficaz para acelerar la convergencia numérica de series.

II. TEORÍA

En muchos problemas electromagnéticos que tratan circuitos multicapa encapsulados, las funciones de Green para los campos y potenciales auxiliares pueden formularse como series infinitas de convergencia lenta, y que tienen la siguiente estructura

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{G}_n f_n, \quad (1)$$

donde \tilde{G}_n representa la función de Green espectral, y normalmente es una función que varía lentamente, y f_n es una función de carácter sinusoidal con rápidas variaciones (típicamente un seno o un coseno).

Para empezar con la formulación, vamos a definir sumas parciales y *restos* de la suma original

$$S_{N-1} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{G}_n f_n, \quad R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \tilde{G}_n f_n, \quad (2a)$$

$$S_\infty = S_{N-1} + R_N, \quad (2b)$$

puesto que las sumas parciales S_{N-1} están acotadas, debemos prestar atención solo al cálculo del *resto* R_N . Entonces aplicamos simples transformaciones algebraicas a dicho resto, lo que nos permite escribir:

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \tilde{G}_n f_n = \tilde{G}_N \sum_{n=N}^{\infty} f_n + \sum_{n=N}^{\infty} \left[(\tilde{G}_{n+1} - \tilde{G}_n) \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \right) \right]. \quad (3)$$

Fijarse ahora que la nueva expresión solo contiene diferencias de la función \tilde{G}_n , y sumas parciales del término sinusoidal f_n . Vamos ahora a realizar la siguiente redefinición para las funciones suma y diferencia anteriores:

$$\tilde{G}_n^{(0)} = \tilde{G}_n, \quad \tilde{G}_n^{(-1)} = \tilde{G}_{n+1}^{(0)} - \tilde{G}_n^{(0)}, \quad (4a)$$

$$f_n^{(0)} = f_n, \quad f_n^{(+1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{(0)}, \quad (4b)$$

con lo que la ecuación (3) se convierte en:

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \tilde{G}_n^{(0)} f_n^{(0)} = \tilde{G}_N^{(0)} f_{N-1}^{(+1)} + \sum_{n=N}^{\infty} \tilde{G}_n^{(-1)} f_n^{(+1)}. \quad (5)$$

La idea es conseguir evaluar las sumas parciales de f_n (ecuación (4b)) de forma analítica. Además el término que queda debe presentar buena convergencia, puesto que está formado por diferencias sucesivas de una función que varía lentamente

(ecuación (4a)). Estas dos consideraciones muestran el gran interés del algoritmo desarrollado.

Ahora aplicamos el mismo procedimiento al último término de la ec. (5). Cuando repetimos el procedimiento un número N de veces, obtenemos

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \tilde{G}_n^{(0)} f_n^{(0)} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{G}_N^{(1-i)} f_{N-1}^{(+i)}, \quad (6)$$

donde hemos definido las sumas sucesivas de f_n , y las diferencias sucesivas de \tilde{G}_n , de la siguiente manera:

$$\tilde{G}_n^{(0)} = \tilde{G}_n, \quad \tilde{G}_n^{(-i)} = \tilde{G}_{n+1}^{(1-i)} - \tilde{G}_n^{(1-i)}, \quad (7a)$$

$$f_n^{(0)} = f_n, \quad f_n^{(+i)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{(i-1)}. \quad (7b)$$

Es interesante darse cuenta que las diferencias sucesivas $\tilde{G}_n^{(-i)}$ pueden ser vistas como la implementación de una derivada numérica, mientras que las sumas sucesivas $f_n^{(+i)}$ como la implementación de una integral numérica. Así es fácil ver que la expresión (6) puede obtenerse aplicando iterativamente el proceso de integración por partes en el resto original definido en (2).

III. EJEMPLO MATEMÁTICO

Para ilustrar el comportamiento numérico de la nueva técnica, vamos ahora a mostrar cómo puede ser aplicada a la suma de la siguiente serie sinusoidal

$$S_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (8)$$

Aunque esta serie tiene solución analítica, si la intentamos sumar numéricamente por un procedimiento directo, nos daremos cuenta que converge muy lentamente, y se obtienen errores por encima del 1%, incluso después de sumar 100 términos. Vamos ahora a aplicar la transformación de la suma por partes dada en la ecuación (6), para ver cómo se comporta la convergencia en este caso. En primer lugar, si identificamos (8) con (1), obtenemos las siguientes relaciones

$$\tilde{G}_n = \tilde{G}_n^{(0)} = \frac{1}{n}, \quad f_n = f_n^{(0)} = \sin(nx). \quad (9)$$

Si consideramos un único término corrector en la ecuación (6) ($i = 1$), entonces el resto puede escribirse

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \approx \tilde{G}_N^{(0)} f_{N-1}^{(+1)}, \quad (10)$$

y la única dificultad radica, ahora, en la evaluación de la suma sucesiva dada por $f_N^{(+1)}$. Sin embargo para la función seno dada en (9), podemos aplicar

la fórmula de la serie geométrica para obtener fácilmente

$$f_n^{(+1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{(0)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sin(kx) = \frac{\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right]}{2 \sin(x/2)}. \quad (11)$$

Con la anterior aproximación para el resto (R_N), hemos evaluado la serie en (8), añadiendo la correspondiente suma parcial ($S_{\infty} = S_{N-1} + R_N$), y hemos finalmente representado el error relativo en función del orden tomado para el resto (N). La Fig. 1 presenta los resultados obtenidos (línea continua), mostrando una mejora considerable en la convergencia, puesto que se obtienen errores relativos entorno al 0.1%, cuando el orden del resto es de solo ($N = 25$).

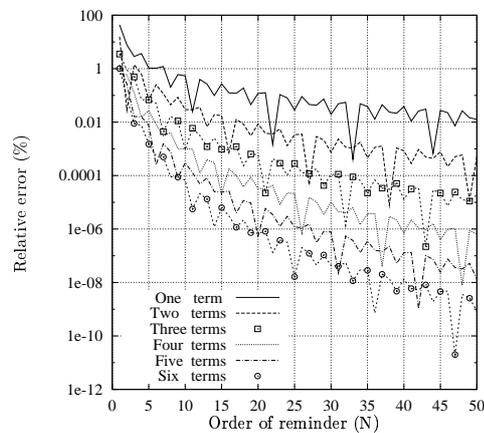


Fig. 1. Error relativo para la serie en ecuación (8), cuando se toma como parámetro los términos correctores de la suma por partes, y en función del orden del resto (N). Para este cálculo hemos tomado $x = 2$.

El siguiente paso puede ser añadir otro término corrector al resto de la serie. En este caso debemos calcular

$$R_N = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \approx \tilde{G}_N^{(0)} f_{N-1}^{(+1)} + \tilde{G}_N^{(-1)} f_{N-1}^{(+2)}. \quad (12)$$

El cálculo de la función diferencia $\tilde{G}_N^{(-1)}$ a través de la ecuación (7a) es muy simple, puesto que los valores de \tilde{G}_n son conocidos, y por lo tanto una simple resta basta para efectuar este cálculo (ver las relaciones (9)). Con respecto a las sumas $f_{N-1}^{(+2)}$, pueden obtenerse nuevamente en forma analítica usando la fórmula para la serie geométrica. Entonces obtenemos

$$f_n^{(+2)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k^{(+1)} = -\frac{\sin\left[(n+1)x\right]}{4 \sin^2(x/2)}. \quad (13)$$

La Fig. 1 muestra el error relativo para este caso en línea discontinua, nuevamente en función del orden del resto (N). El resultado muestra una mejora considerable en la convergencia, y ahora errores relativos del orden de 0.01% se obtienen para $N = 25$.

El mismo procedimiento puede ahora generalizarse para un número arbitrario de términos correctores. Para ello, las ecuaciones (11,13) pueden extenderse para expresar las sumas sucesivas en un caso general de la siguiente forma

$$f_n^{(+i)} = \frac{\cos \left\{ (i-1) \frac{\pi}{2} + \left[n + i \frac{1}{2} \right] x \right\}}{2^{(i)} \left[\sin(x/2) \right]^{(i)}}. \quad (14)$$

Usando esta expresión analítica, hemos calculado los errores relativos para la serie cuando se usan términos correctores de mayor orden. La Fig. 1 presenta los resultados obtenidos. Como se aprecia, hay una mejora en la convergencia numérica para cada nuevo término corrector empleado. Por ejemplo, cuando usamos seis términos, se consigue una precisión numérica de $10^{-8}\%$, para un orden del resto de solo $N = 25$.

Como último estudio de convergencia, hemos calculado el error relativo para la misma serie, pero en función del número de términos correctores, y tomando el orden del resto (N) como parámetro. La Fig. 2 presenta los resultados obtenidos, indicando nuevamente una mejora considerable en la convergencia numérica de la serie. Por ejemplo,

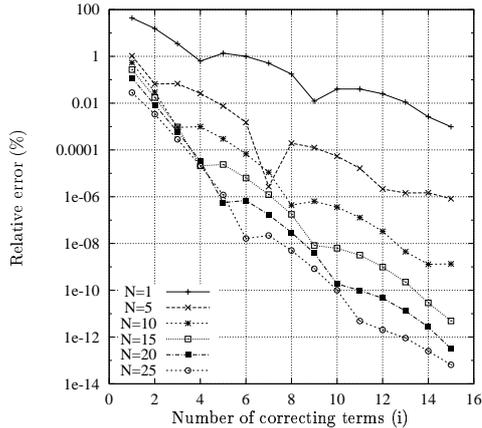


Fig. 2. Error relativo para la serie de la ecuación (8), en función del número de términos correctores, y tomando el orden del resto como parámetro. Para este cálculo hemos tomado $x = 2$.

los resultados demuestran que puede obtenerse una precisión de $10^{-8}\%$ tomando seis términos correctores ($i = 6$), y con solo 25 elementos de la serie original.

IV. APLICACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

La técnica que hemos desarrollado puede usarse para la evaluación eficiente de series que converjan lentamente. Un ejemplo típico lo tenemos con la función de Green asociada a una guía de placas paralelas Fig. 3.

Tal y como muestra la Fig. 3, el análisis de esta estructura puede realizarse de dos formas diferentes. Usando el punto de vista en guía onda, la dirección de propagación z es paralela a las placas, y el campo se expande en una serie infinita de modos guiados (Fig. 3a). En este caso, la expan-

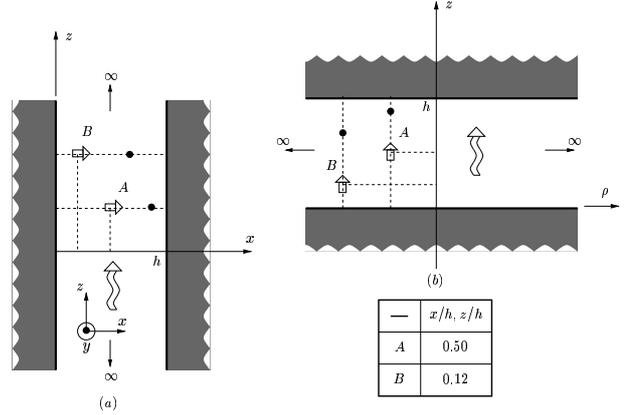


Fig. 3. Guía onda de placas paralelas estudiada. (a) Punto de vista en guía onda. (b) Punto de vista de medio multicapa (Sommerfeld).

sión en una suma de modos discretos da para el potencial escalar eléctrico [5]

$$4\pi\epsilon_0 G_V^{PPW}(\rho) = \quad (15a)$$

$$\frac{2j\pi}{h} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(2)}(\rho k_z) \sin(k_x x) \sin(k_x x'),$$

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2}, \quad \rho = \sqrt{(z - z')^2 + (y - y')^2},$$

$$(15b)$$

La otra alternativa (que puede extenderse directamente a un caso multicapa) define la dirección de propagación z en la dirección normal a las placas (Fig. 3b). En este último caso tenemos un medio infinito terminado por dos placas paralelas, y por tanto la expansión de los campos se hace en función de un espectro continuo de modos radiales, y que da lugar a la ya conocida integral de Sommerfeld:

$$G_V^{PPW}(\rho) = \int_0^{\infty} J_0(k_\rho \rho) k_\rho \tilde{G}_V(k_\rho) dk_\rho, \quad (16)$$

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

El problema de la evaluación eficiente de la integral en (16) ha sido tratado con detalle en trabajos anteriores [6], [7]. Ahora, con la técnica desarrollada en el presente trabajo, podemos intentar la evaluación eficiente de la ecuación (15).

Como ejemplo se presenta en la Fig. 4 el error numérico obtenido cuando se emplea la suma por partes para la evaluación de la serie en (15), en función del número de términos correctores tomados, y para un orden del resto de $N = 36$. Puede

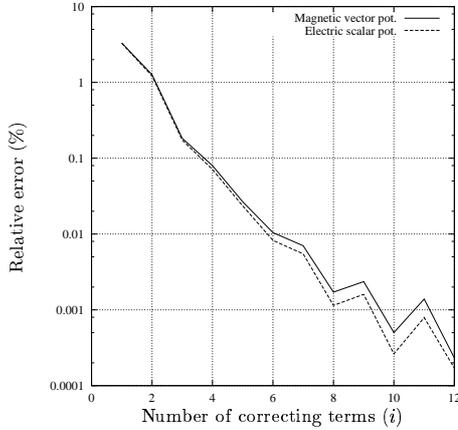


Fig. 4. Error relativo obtenido con la nueva suma por partes, en función del número de términos correctores. $h = 19.05$ mm, $x = 3$ mm, $x' = 5$ mm, $f = 20$ GHz.

observarse que con tan solo 6 iteraciones el error relativo es de 0.01%, demostrando la efectividad de la nueva técnica. Finalmente la Fig. 5 presenta la función de Green para el potencial eléctrico escalar obtenido con la ecuación (15), y la Fig. 6 la función de Green correspondiente pero para el potencial vector magnético, obtenida con una expresión similar a la (15) (solo cambiando senos por cosenos). Estos resultados están comparados con

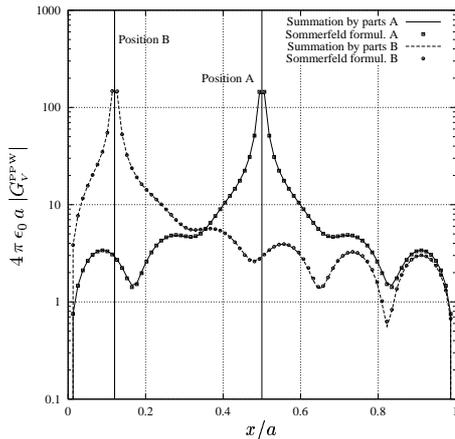


Fig. 5. Potencial eléctrico obtenido con la técnica novedosa y con la técnica tradicional de Sommerfeld, para las posiciones A y B de fuente de la Fig. 3. $f = 45$ GHz, $h = 19.05$ mm.

los obtenidos con la formulación de Sommerfeld estándar. Puede observarse que la precisión obtenida con el nuevo algoritmo es casi perfecta.

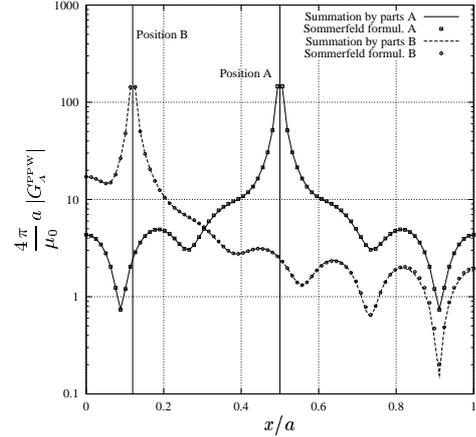


Fig. 6. Potencial vector magnético para el mismo caso que en Fig. 5.

V. CONCLUSIONES

En esta contribución hemos presentado una técnica nueva y eficiente para la aceleración de la convergencia numérica de toda una clase de series que aparecen con frecuencia en problemas electromagnéticos. La técnica puede ser vista como la aplicación de la integración por partes a secuencias discretas, por lo que le hemos dado el nombre de "suma por partes".

La técnica ha sido aplicada primeramente a la evaluación numérica de un ejemplo canónico, y ha demostrado que efectivamente la convergencia mejora considerablemente. Finalmente la técnica se ha aplicado con éxito a un problema electromagnético real como es el cálculo numérico de la función de Green en una guía de placas paralelas.

REFERENCES

- [1] C. J. Railton and S. A. Meade, "Fast rigorous analysis of shielded planar filters," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 978–985, May 1992.
- [2] J. Y. Lee, T. S. Horng, and N. G. Alexopoulos, "Analysis of cavity-backed aperture antennas with a dielectric overlay," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, pp. 1556–1562, November 1994.
- [3] A. A. Maradudin and A. R. McGurn, "Photonic band structures of two-dimensional dielectric media," in *Photonic Band Gaps and Localization* (C. M. Soukoulis, ed.), pp. 247–268, New York: Plenum Press, NATO ASI Series, 1993.
- [4] C. Brezinski and M. R. Zaglia, *Extrapolation Methods*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1991.
- [5] J. J. Yang, Y. L. Chow, G. E. Howard, and D. G. Fang, "Complex images of an electric dipole in homogeneous and layered dielectrics between two ground planes," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 40, pp. 595–600, March 1992.
- [6] J. R. Mosig, "Integral equation technique," in *Numerical Techniques for Microwave and Millimeter-Wave Passive Structures* (T. Itoh, ed.), ch. 3, pp. 133–213, New York: Wiley Interscience Publication, 1989.
- [7] M.-J. Tsai, C. Chen, and N. G. Alexopoulos, "Sommerfeld integrals in modeling interconnects and microstrip elements in multi-layered media," *Electromagnetics*, vol. 18, no. 3, pp. 267–288, 1998. Special Issue-The Centennial of Sommerfeld's Diffraction Problem.