

ESTIMACIÓN BAYESIANA DE SEÑALES CAÓTICAS GENERADAS POR MAPAS PWL

Carlos Pantaleón

Ing. Comunicaciones

U. Cantabria

carlos@gtas.dicom.unican.es

Luis Vielva

Ing. Comunicaciones

U. Cantabria

luis@dicom.unican.es

David Luengo

Ing. Comunicaciones

U. Cantabria

david@gtas.dicom.unican.es

Ignacio Santamaría

Ing. Comunicaciones

U. Cantabria

nacho@gtas.dicom.unican.es

Resumen—Las señales caóticas son potencialmente atractivas en muchas aplicaciones de procesado de señal. En esta comunicación se presentan estimadores Bayesianos —tanto máximo *a posteriori* (MAP) como de mínimo error cuadrático medio (MS)— de secuencias caóticas generadas por mapas lineales a tramos (PWL) en presencia de ruido blanco. Las simulaciones realizadas confirman que la incorporación del conocimiento *a priori* de las distribuciones mejora el comportamiento del estimador de máxima verosimilitud (ML).

I. INTRODUCCIÓN

LAS señales caóticas —secuencias generadas por un sistema dinámico no lineal en estado caótico— pueden proporcionar nuevos mecanismos para el diseño de sistemas de comunicación y detección remota [1]. En esta comunicación estudiamos la estimación de señales caóticas generadas mediante la iteración de mapas PWL unidimensionales [2] en presencia de ruido blanco gaussiano.

Existen diversos algoritmos para la estimación de señales caóticas, generalmente subóptimos. En [3] y [4] se utilizan métodos basados en la conexión entre la secuencia simbólica asociada a una señal caótica particular y su condición inicial. En [5] se propone un método basado en programación dinámica. En [6] se presenta el estimador ML para el *tent map*, un tipo particular de mapas PWL, y en [7] se generaliza a todos los mapas PWL. En [8] se presenta un estimador Bayesiano para señales caóticas generadas por el *tent map*. En esta comunicación presentamos la generalización de [8] a mapas PWL arbitrarios.

II. DINÁMICA SIMBÓLICA DE LOS MAPAS PWL

Si se divide el intervalo $[0, 1]$ en M subintervalos convexos disjuntos E_i , $i = 1, \dots, M$, puede definirse el mapa PWL $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como

$$F(x) = a_i x + b_i, \quad \text{si } x \in E_i,$$

siendo a_i y b_i constantes conocidas. Si se itera una condición inicial desconocida $x[0] \in [0, 1]$ según $x[n] = F(x[n-1])$ puede generarse una señal caótica.

Para una señal caótica de longitud $N+1$ se define su secuencia simbólica asociada —itinerario— como la secuencia de N símbolos $\mathbf{s} = \{s[0], s[1], \dots, s[N-1]\}$; donde $s[k] = i$ si $F^k(x[0]) \in E_i$ y F^k es el resultado de la composición funcional k -ésima de F . Definimos S_N como el mapa que asocia una condición inicial en $[0, 1]$ a su itinerario correspondiente de longitud N .

En base a los itinerarios puede definirse otra partición del espacio de fase: dada una secuencia simbólica \mathbf{s}_j definimos $R_j = \{x \in [0, 1] : S_N(x) = \mathbf{s}_j\}$. Todos los puntos del espacio de fase pertenecen a uno y sólo uno de estos conjuntos, verificándose que si los conjuntos E_i son convexos los

R_j también lo son [9]. El número de regiones R_j cumple $P \leq M^N$, verificándose la igualdad cuando todas las secuencias simbólicas son posibles.

Dada una condición inicial $x[0]$ y su itinerario asociado $\mathbf{s} = S_N(x[0])$, la composición k -ésima de F es

$$F_{\mathbf{s}}^k(x[0]) = A_{\mathbf{s}}^{k,k} x[0] + \sum_{l=0}^{k-1} A_{\mathbf{s}}^{l,k} b_{s[k-1-l]}, \quad (1)$$

con $A_{\mathbf{s}}^{0,k} = 1$ y $A_{\mathbf{s}}^{l,k} = \prod_{n=k-l}^{k-1} a_{s[n]}$. Si definimos la función indicador $\chi_j(x)$ que valga uno si $x \in R_j$ y cero en caso contrario, podemos poner $F^k(x) = \sum_{j=1}^P \chi_j(x) F_{\mathbf{s}_j}^k(x)$.

III. ESTIMACIÓN BAYESIANA DE SECUENCIAS GENERADAS POR MAPAS PWL

El modelo matemático del problema es el siguiente: dada la secuencia $y[n] = x[n] + w[n]$, $n = 0, 1, \dots, N$, donde $x[n]$ se genera iterando el mapa PWL sobre alguna condición inicial $x[0]$ desconocida y $w[n]$ es ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza σ^2 , se pretende estimar la condición inicial $x[0]$.

Como densidad *a priori* de $x[0]$ proponemos utilizar una aproximación escalonada de la densidad invariante asociada al mapa PWL $p(x[0]) = \sum_{j=1}^P p_j \chi_j(x[0])$. En muchos casos, como los mapas de Markov, existen expresiones cerradas para estas densidades p_j [2]; en caso contrario pueden estimarse a partir de secuencias suficientemente largas.

Para calcular la densidad *a posteriori* $p(x[0]|\mathbf{y})$, siendo $\mathbf{y} = \{y[0], y[1], \dots, y[N]\}$ una colección de variables aleatorias Gaussianas independientes con la misma varianza, partimos de la densidad condicional

$$p(\mathbf{y}|x[0]) = \gamma \exp \left[-\frac{\sum_{k=0}^N (y[k] - F^k(x[0]))^2}{2\sigma^2} \right],$$

con $\gamma = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma)^{N+1}$. Utilizando (1), podemos poner

$$p(\mathbf{y}|x[0]) = \gamma \sum_{j=1}^P \chi_j(x[0]) \exp \left[-\frac{J_j(x[0])}{2\sigma^2} \right],$$

con

$$J_j(x[0]) = \sum_{k=0}^N (y[k] - F_{\mathbf{s}_j}^k(x[0]))^2. \quad (2)$$

Una vez conocida $p(\mathbf{y}|x[0])$, aplicando la regla de Bayes,

$$p(x[0]|\mathbf{y}) = K \sum_{j=1}^P p_j \chi_j(x[0]) \exp \left[-\frac{J_j(x[0])}{2\sigma^2} \right],$$

siendo K una constante de normalización. En cada región R_j , (2) es una función cuadrática en $x[0]$, cuyo mínimo es

$$\hat{x}_j[0] = \frac{\sum_{k=0}^N \left(y[k] - \sum_{l=0}^{k-1} A_{s_j}^{l,k} b_{s_j[k-1-l]} \right) A_{s_j}^{k,k}}{\sum_{k=0}^N \left(A_{s_j}^{k,k} \right)^2},$$

con lo que

$$p(x[0]|\mathbf{y}) = K \sum_{j=1}^P q_j \chi_j(x[0]) \exp \left[-\frac{(x[0] - \hat{x}_j[0])^2}{2\sigma_j^2} \right],$$

donde

$$q_j = p_j \exp \left[-\frac{J_j(\hat{x}_j[0])}{2\sigma^2} \right], \quad \sigma_j^2 = \sigma^2 \left(\sum_{k=0}^N \left(A_{s_j}^{k,k} \right)^2 \right)^{-1}.$$

Integrando $p(x[0]|\mathbf{y})$ se obtiene $K^{-1} = \sum_{j=1}^P p_j B_j$, con

$$B_j = \int_{R_j} \exp \left[-\frac{(x[0] - \hat{x}_j[0])^2}{2\sigma_j^2} \right] dx[0].$$

La función densidad de probabilidad condicional esta compuesta por P Gaussianas truncadas ponderadas por los coeficientes. El máximo de cada Gaussiana viene dado por la estimación ML para un itinerario conocido $\hat{x}_{\text{ML}}^j[0] = \min(R_j^l, \max(R_j^u, \hat{x}_j[0]))$, siendo R_j^l y R_j^u los extremos inferior y superior de la región R_j . El estimador MAP se obtiene a partir del ML como $\hat{x}_{\text{MAP}}[0] = \hat{x}_{\text{ML}}^m[0]$, con

$$m = \underset{j}{\operatorname{argmax}} \left\{ p_j \exp \left[-\frac{J(\hat{x}_{\text{ML}}^j[0])}{2\sigma^2} \right] \right\}, \quad j = 1, \dots, P.$$

El estimador MS es la media de la densidad *a posteriori*

$$\hat{x}_{\text{MS}}[0] = K \sum_{j=1}^P q_j B_j \left(\hat{x}_j[0] - \frac{\sigma_j^2}{B_j} g(\hat{\xi}_j) \right),$$

donde $\hat{\xi}_j = \hat{x}_j[0] - d_j$ es el desplazamiento de cada estimación desde el punto medio (d_j) de la región asociada, con anchura Δ_j , y

$$g(\hat{\xi}_j) = \exp \left[-\frac{(\hat{\xi}_j - \Delta_j/2)^2}{2\sigma_j^2} \right] - \exp \left[-\frac{(\hat{\xi}_j + \Delta_j/2)^2}{2\sigma_j^2} \right].$$

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

El procedimiento anterior se ha aplicado a la estimación de secuencias generadas por el mapa de Markov de la figura 1 con $a = 0.9$ y $N = 6$.

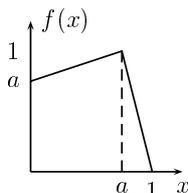


Figura 1: mapa de Markov con $M = 2$.

Utilizando la densidad *a priori* del mapa [2] se han obtenido mil condiciones iniciales $x[0]$, generando $x[n]$ para cada una. Para cada secuencia $x[n]$ se han construido mil secuencias ruidosas $y[n]$ por cada valor de SNR. En la siguiente tabla se muestra el error cuadrático medio (MSE) obtenido con los tres estimadores

	SNR	10	15	20	25	30	45
-MSE (dB)	ML	18.2	30.1	40.0	47.9	54.9	73.1
	MAP	20.7	31.1	40.6	48.2	55.1	73.2
	MS	20.8	33.0	41.9	49.4	55.9	73.3

En la figura 2 se muestra un ejemplo del comportamiento de los tres estimadores para una condición inicial dada ($x[0] = 0.83$). Para cada SNR se han simulado mil señales ruidosas $y[n]$ y se ha calculado el MSE promedio.

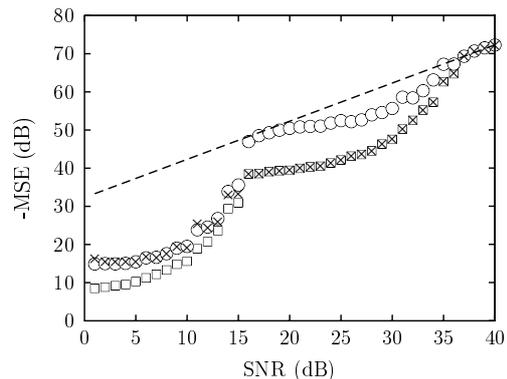


Figura 2: MSE de ML (\square), MAP (\times), y MS (\circ) frente a límite de Cramer-Rao.

V. CONCLUSIONES

Se han desarrollado estimadores Bayesianos para un tipo de señales caóticas generadas mediante la iteración de mapas PWL y observadas en presencia de ruido blanco Gaussiano. Se ha obtenido una expresión cerrada para la densidad condicional de la condición inicial a partir del itinerario. Utilizando la densidad invariante del mapa como densidad *a priori* se ha obtenido la densidad *a posteriori* mediante la regla de Bayes. Los estimadores Bayesianos obtenidos mejoran el comportamiento del de máxima verosimilitud para bajas relaciones señal-ruido.

REFERENCIAS

- [1] A. V. Oppenheim, K. M. Cuomo, "Chaotic Signals and Signal Processing", in *The Digital Signal Processing Handbook* V. K. Madiseti, D. B. Williams eds. CRC press, Boca Raton, Florida 1998.
- [2] S. H. Isabelle and G. W. Wornell, "Statistical Analysis and Spectral Estimation Techniques for One-Dimensional Chaotic Signals", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 45, no 6. pp. 1495–1506, 1997.
- [3] L. Cong, W. Xiaofu and S. Songgeng, "A General Efficient Method for Chaotic Signal Estimation", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, no 5. pp. 1424–1428, 1999.
- [4] S. Wang, P.C. Yip and H. Leung, "Estimating Initial Conditions of Noisy Chaotic Signals Generated by Piece-wise-Linear Markov Maps Using Itineraries", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 47, no 12. pp. 3289–3302, 1999.
- [5] S. M. Kay, "Methods for Chaotic Signal Estimation", *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 43, no 8. pp. 2013–2016, 1995.
- [6] H. C. Papadopoulos, G. W. Wornell, "Maximum Likelihood Estimation of a Class of Chaotic Signals", *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 41, no 1. pp. 312–317, 1995.
- [7] C. Pantaleón, D. Luengo, I. Santamaría, "Optimal Estimation of Chaotic Signals Generated by Piecewise-Linear Maps", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, no. 8, pp. 235–237, Aug. 2000.
- [8] C. Pantaleón, D. Luengo, I. Santamaría, "Bayesian Estimation of a Class of Chaotic Signals", Proc. of the 2000 IEEE Int. Conf. on Acoust., Speech, and Signal Processing (ICASSP 2000), vol. 1. pp. 197–200, Istanbul, Turkey, June 2000.
- [9] C. W. Wu and L. O. Chua, "Symbolic Dynamics of Piecewise-Linear Maps", *IEEE Trans. on CAS II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 41, no 6. pp. 420–424, 1994.