ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN MÉTODOS DE MULTI-RESOLUCIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO (MRTD) BASADOS EN LA TRANSFORMADA DISCRETA EN WAVELETS

C. Represa(*), C. Pereira(*), I. Barba (**), J. Represa (**)
(*) Dpto. de Ingeniería Electromecánica. Universidad de Burgos. 09001 Burgos.
(**) Dpto. de Electricidad y Electrónica. Universidad de Valladolid. 47071 Valladolid.
E-Mail: crepresa@ubu.es, jrepresa@ee.uva.es

RESUMEN

En este artículo se presenta una justificación teórica de la estabilidad numérica en nuestro esquema MRTD, previamente propuesto. Se demuestra que (utilizando wavelets de Haar) este algoritmo es estable para valores de Δt hasta el doble de los obtenidos con el método FDTD, para la misma resolución espacial.

1.- Análisis de estabilidad en una dimensión.

Las ecuaciones rotacionales de Maxwell para el caso de propagación en **z** y con campos $\mathbf{E}_x$ y $\mathbf{H}_y$, considerando por conveniencia una región del espacio con propiedades normalizadas *m* = 1, *e* = 1, *s* = 0 y *c* = 1 se escriben como:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial H_y}{\partial t} \qquad \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{1}$$

ecuaciones que pueden ser re-escritas en forma compacta como:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{2}$$

donde $V = E_x + H_y$

Siguiendo la deducción presentada en [1], la estabilidad de una representación numérica particular de (2) puede examinarse sencillamente sin más que considerar el siguiente par de problemas de autovalores:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\text{numérico}} \mathrm{V} = \Lambda \mathrm{V} \tag{3}$$

$$-\left.\frac{\partial}{\partial z}\right|_{\text{numérico}} \mathrm{V} = \Lambda \mathrm{V} \tag{4}$$

lo que significa que asumimos la propagación de modos propios de tipo onda plana en el espacio de datos numéricos. El espectro de autovalores para estos modos, debido al proceso de derivación numérica espacial (4), estará completamente determinado y deberá ser comparado con el espectro "estable" de autovalores determinados por el proceso de derivación numérica en el tiempo (3). La imposición de que el espectro completo de autovalores espaciales sea un subconjunto contenido en el rango estable, asegurará que todos los posibles modos para la onda numérica en la red serán estables.

1.1.- El problema de autovalores en el tiempo.

A fin de determinar el rango de estabilidad de los autovalores modales, resolvemos la ecuación (3) en la que la derivada numérica temporal se obtiene mediante diferencias finitas centradas con paso temporal Δt, donde empleamos la notación habitual en FDTD [1]:

$$\frac{V|_i^{n+1/2} - V|_i^{n-1/2}}{\Delta t} = \Lambda V|_i^n \tag{5}$$

A continuación, definimos un factor de crecimiento de la solución como:

$$q_i = \frac{V|_i^{n+1/2}}{V|_i^n} = \frac{V|_i^n}{V|_i^{n-1/2}}$$

y, naturalmente, deseamos que $|q_i| \le 1$ para todos los posibles modos espaciales en todos los puntos del mallado *i* a fin de evitar el crecimiento ilimitado de ningún modo a medida que el algoritmo progresa en el tiempo. La sustitución en (5) proporciona:

$$\frac{q_i V|_i^n - \left(V|_i^n / q_i\right)}{\Delta t} = \Lambda V|_i^n \tag{6}$$

es decir:

$$q_i^2 - \Lambda \Delta t q_i - 1 = 0 \tag{7}$$

Si ahora llamamos $a = \frac{\Lambda \Delta t}{2}$, todas las posibles soluciones de (7) son de la forma:

$$q_i = a \pm \sqrt{a^2 + 1} \tag{8}$$

En cualquier caso, observamos que es siempre $\left|q_i\right| = 1$ (quedando satisfechos, por lo tanto, los requerimientos de estabilidad del algoritmo) en tanto *a* sea un número imaginario puro, comprendido entre –*j* y +*j* .

$$\boxed{-\frac{2}{\Delta t} \leq \mathrm{Im}(\Lambda) \leq +\frac{2}{\Delta t}} \qquad (9)$$

1.2.- El problema de autovalores en el espacio.

Todos los posibles modos espaciales deben tener autovalores comprendidos dentro del rango estable obtenido en (9) a fin de garantizar la estabilidad del algoritmo. Tales autovalores los obtenemos resolviendo la ecuación (4). Aquí, la derivación numérica especial, en nuestro esquema MRTD basado en la transformada en wavelets [2] adopta la forma de un operador matricial, a través de una matriz **D** cuyos elementos son formas integrales de las funciones de escala y wavelet escogidas, incluyendo su traslación espacial discreta para la derivada primera. El tamaño de la matriz depende del número de puntos escogidos en la red espacial. El esquema de multi-resolución nos permite descomponer esta matriz en un conjunto de sub-matrices de resolución inferior que la original, de forma que, si llamamos $\mathbf{D}^0$ a la matriz original (de más alta resolución) la ecuación (4) puede re-escribirse como::

$$-\mathbf{D}^0 V = \Lambda V \qquad (10)$$

donde $\mathbf{D}^0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}^1 & \mathbf{B}^1 \\ \hline \Gamma^1 & \mathbf{D}^1 \end{array}\right)$ y

$$\mathbf{A}^j = \left\{a_{il}^j\right\},\ \mathbf{B}^j = \left\{b_{il}^j\right\},$$

$$\tilde{\mathbf{A}}^j = \left\{g_{il}^j\right\},\ \mathbf{D}^j = \left\{d_{il}^j\right\}$$

$$a_{il}^j = 2^{-j}\int_{-\infty}^{\infty} y\,(x-i)\cdot\frac{d}{dx}y\,(x-l)\,dx$$

$$b_{il}^j = 2^{-j}\int_{-\infty}^{\infty} y\,(x-i)\cdot\frac{d}{dx}j\,(x-l)\,dx$$

$$g_{il}^j = 2^{-j}\int_{-\infty}^{\infty} j\,(x-i)\cdot\frac{d}{dx}y\,(x-l)\,dx$$

$$\ _{il}^{j} = \ ^{-j}\int_{\infty}^{\infty} j\,(x-i)\cdot\frac{}{dx}j\ \ x-\ \ )\,dx$$

La ecuación (10) adopta ahora la forma:

$$\left(- \ ^{0} \quad \mathbf{I}\Lambda\right)V = 0 \qquad (11)$$

típica de un problema de autovalores. Si, por ejemplo,
D se construye usando
encontramos que todos los posibles valores del espectro de la matriz σ **D**

$-\,{}^{1}\!/_{\Delta z}\, j$ and $+\,{}^{1}\!/_{\Delta z}\, j$, y así::

$$\boxed{-\frac{1}{\Delta z} \leq \mathrm{Im}(\Lambda) \leq +\frac{1}{\Delta z}} \qquad (12)$$

Para garantizar la estabilidad numérica de un modo especial cualquiera, su rango debe estar completamente contenido en el rango estable de autovalores obtenidos en el tiempo que aparecen en (9). Dado que todos los autovalores, tanto espaciales como temporales, están situados sobre el eje imaginario y distribuidos simétricamente en torno a cero, solo es preciso imponer que el valor mayor de σ(**D**) sea inferior a la cota superior de (9):

$$\frac{1}{\Delta z} \leq \frac{2}{\Delta t} \qquad (13)$$

y, con ello, tras de-normalizar a c :

$$\boxed{\Delta t_{MRTD} \leq 2\frac{\Delta z}{c}} \qquad (14)$$

Nótese que $\dfrac{\Delta t_{MRTD}}{\Delta t_{FDTD}} \leq 2$, en consecuencia, con una resolución similar Δz nuestro esquema de multi-resolución nos permite un ahorro del 50% en comparación con FDTD.

2.- Referencias

[1] A. Taflove, *Computational Electrodynamics:The Finite-Difference Time-Domain Method*, Artech House, 1995.

[2] C. Represa, C. Pereira, I. Barba, J. Represa, "A Novel Approach to Multi-Resolution in Time Domain based on Discrete Wavelet Transform", *Fourth International Workshop on Computational electromagnetics in the time-domain - TLM, FDTD and related techniques (CEM-TD).* Nottingham (UK), 16-19 Septiembre 2001.

[2] M. Fujii, W. J.R. Hoefer, "A 3D Haar-Wavelet Based Multiresolution Analysis similar to the FDTD method", *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, vol. MTT-46, no. 12, pp. 2463-2475, December 1998.