

# UN NUDO TLM TRIDIMENSIONAL Y NO ORTOGONAL PARA EL EJE Z DE COORDENADAS CILÍNDRICAS

Juan A. Morente, Jorge A. Portí y Miguel A. Carvajal

Departamento de Física Aplicada  
 Universidad de Granada,  
 jmorente@ugr.es, jporti@ugr.es

## RESUMEN

En esta comunicación se describe un nuevo nudo TLM, tridimensional, condensado y no ortogonal, para el eje z de coordenadas cilíndricas. En este nudo, un número indeterminado de ramas pueden nacer desde el eje z en dirección radial, permitiendo un muestreo más efectivo espacial de la malla TLM cuando ésta se genera en coordenadas cilíndricas.

## 1. INTRODUCCIÓN

El método numérico TLM (Transmission Line Modelling) puede ser implementado mediante una malla irregular, en la que los nudos cambian sus dimensiones para adaptarse mejor al volumen modelado, y utilizando cualquier sistema de coordenadas curvilíneas ortogonal. Pero la dificultad de modelar el eje z en coordenadas cilíndricas y el origen de coordenadas en esféricas, ha restringido el uso de mallas no cartesianas a los casos en que estas regiones problemáticas sean excluidas del sistema [1]-[3].

En sistemas con simetría cilíndrica (p.e. guías de onda de sección circular, fibras ópticas, etc.), el sistema de coordenadas natural tiene la ventaja de que automáticamente genera y se ajusta de manera exacta a la frontera. Pero con el TLM el eje de la malla necesita un tratamiento especial. Con este fin y con el de evitar aproximaciones que a veces inducen modos espúreos, en esta comunicación se presenta un nudo no ortogonal tridimensional para el eje z de coordenadas cilíndricas del que pueden nacer un número indeterminado de grupos de cuatro ramas que generen un muestreo espacial más efectivo.

## 2. MATRIZ DE SCATTERING DEL NUEVO NUDO

La figura 1 muestra la geometría del nuevo nudo. El nudo es básicamente un nudo simétrico condensado irregular cartesiano con grupos de cuatro ramas adicionales que nacen del eje en dirección radial. Por claridad del dibujo sólo un grupo de cuatro ramas ha sido representado en la figura. Además de los grupos de cuatro ramas que son añadidos al nudo original cartesiano, dos stubs deben de ser agregados para asegurar el sincronismo: un stub capacitivo o abierto, línea 13, asociado al campo eléctrico  $E_z$ , y un stub en cortocircuito o inductivo, línea 14, asociado al campo magnético  $H_z$ . En general, si colocamos  $n$  ramas radialmente, el total de líneas de transmisión del nudo

viene dado por  $14+8n$ . Las primeras doce líneas se corresponden con la numeración y polarización del nudo cartesiano, excepto en la polaridad de las líneas 3 y 12 que se han invertido para conectar directamente con las líneas correspondientes de los nudos adyacentes. De las líneas principales con índice superior a 14, aquellas con polarización azimutal llevan asociado un índice impar, y las que tienen polarización axial, un índice par. La impedancia característica de todas las líneas es  $Z_0=(Y_0)^{-1}$ , excepto la línea 13 que tiene una admitancia  $Y_0Y_z$  y la línea 14 con impedancia característica  $Z_0Z_z$ .

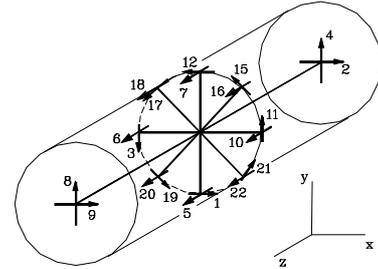


Figura 1. Nudo TLM para el eje de coordenadas cilíndricas.

Para obtener la matriz de scattering aplicamos las leyes de Faraday y Ampère en forma integral a los circuitos cerrados que define el nudo sobre su superficie. La circulación del campo eléctrico conecta, mediante un nudo serie, las líneas 1, 3, 11, 12, 14 y todas las líneas impares extra añadidas en dirección acimutal con índice superior a 14, mientras la circulación del campo magnético conecta las líneas 1, 2, 9 y 12 mediante un nudo paralelo. Siguiendo el proceso descrito en [4], si un pulso incide por la puerta 1, los voltajes reflejados por las líneas que sólo aparecen en el circuito serie son

$$V_3^r = V_{11}^r = V_{\text{impar} > 14}^r = \frac{-2}{4(n+1) + Z_z}, \quad (1)$$

$$V_{14}^r = \frac{2Z_z}{4(n+1) + Z_z}, \quad (2)$$

mientras que los voltajes reflejados por las líneas que sólo pertenecen al circuito paralelo vienen dados por

$$V_2^r = V_9^r = \frac{1}{2}. \quad (3)$$

Los voltajes reflejados hacia atrás, línea 1, y transmitidos hacia adelante, línea 12, incluidos en ambos circuitos, pueden ser obtenidos con las ecuaciones siguientes:

$$V_1 + V_{11} + V_{12} + V_3 - V_{14} + 4nV_{\text{impar}>14} = 0, \quad (4)$$

$$I_1 + I_2 - I_{12} + I_9 = 0, \quad (5)$$

que se derivan de imponer las leyes de Faraday y Ampère a la superficie externa del nudo y que representan la conservación del flujo magnético y de la carga [5]. Sustituyendo (1) y (2) en (4), (3) en (5) y llevando en mente que las tensiones y corrientes totales están relacionadas con las incidentes y reflejadas por  $V_m = V_m^i + V_m^r$  e  $I_m = I_m^i - I_m^r$ , se obtiene

$$V_1^r = V_{12}^r = \frac{4n + Z_z}{8(n+1) + 2Z_z}. \quad (6)$$

Las ecuaciones (1)-(3) y (6) suministran los elementos de la primera columna de la matriz de scattering,  $S$ , que relaciona las tensiones incidentes y reflejadas,  $V^r = SV^i$ . Un cálculo similar al descrito previamente, aplicado a cada una de las líneas que componen el nudo, suministra el resto de columnas de esta matriz.

### 3. UN EJEMPLO NUMÉRICO

Para poner a prueba el nuevo nudo, hemos simulado una cavidad cilíndrica de 6 cm de radio y 10 cm de altura, mediante una red cilíndrica de 12x12x20 nudos simétricos condensados para  $\rho$ ,  $\phi$ ,  $z$ , respectivamente, y una columna central con 20 nudos especiales sobre el eje  $z$ , como los presentados en esta comunicación. Cada nudo del eje  $z$  tiene un stub en abierto con una admitancia característica normalizada dada por

$$Y_z = \epsilon_r \frac{2\pi\rho_0^2}{c\Delta t\Delta z} - 4(n+1), \quad (7)$$

donde  $\rho_0$  es el radio de los nudos del eje,  $\Delta z$  su altura, y  $n=2$  para unir las ramas de los nudos del eje con los nudos estándar de una malla cilíndrica que posee 24 líneas radiales. El diámetro de los nudos centrales se ha elegido igual al ancho en dirección radial del resto de nudos. Además, cada nudo sobre el eje  $z$  incluye un stub en cortocircuito con una impedancia característica normalizada  $Z_z$  dada por una expresión similar a (7), pero sustituyendo la permitividad eléctrica  $\epsilon_r$  por la permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$ . Se utilizó un incremento temporal  $\Delta t = 1.3227 \cdot 10^{-12}$  s, y se llevaron a cabo 50,000 iteraciones. La cavidad se excitó mediante un impulso eléctrico en el nudo (10,1,10) y la salida se eligió en (10,5,16). La tabla 1 muestra las frecuencias de resonancia encontradas y el error que se comete cuando se comparan con las teóricas. Para bajas frecuencias, la malla cilíndrica con el nuevo nudo sobre el eje  $z$  se ajusta mejor a los resultados teóricos. Cuando la frecuencia aumenta, la dispersión que los stubs introducen en toda la malla hace que se incremente ligeramente el error numérico que se comete. Los resultados que se obtienen sin la utilización de este nuevo nudo,

y solventando el problema del eje  $z$  cruzando las líneas sobre él, tienen un peor comportamiento y además genera modos espúreos ya que al no colocar centros de nudos sobre el eje  $z$  no se define unívocamente el campo sobre el eje.

| Modo                | Solución analítica             | Red cilíndrica con el nuevo nudo |           |
|---------------------|--------------------------------|----------------------------------|-----------|
|                     | Frecuencia de resonancia (GHz) | Frecuencia de resonancia (GHz)   | Error (%) |
| TM <sub>0,1,0</sub> | 1.912                          | 1.914                            | 0.1       |
| TE <sub>1,1,1</sub> | 2.095                          | 2.110                            | 0.7       |
| TM <sub>0,1,1</sub> | 2.430                          | 2.426                            | 0.2       |
| TE <sub>2,1,1</sub> | 2.854                          | 2.999                            | 5.1       |
| TM <sub>1,1,0</sub> | 3.047                          | 3.074                            | 0.9       |
| TE <sub>1,1,2</sub> | 3.336                          | 3.360                            | 0.7       |
| TM <sub>1,1,1</sub> | 3.396                          | 3.421                            | 0.7       |
| TE <sub>0,1,1</sub> | 3.396                          | 3.391                            | 0.1       |
| TM <sub>0,1,2</sub> | 3.556                          | 3.556                            | 0.0       |

Tabla 1. Frecuencias de resonancia para una cavidad cilíndrica de radio 6 cm y altura 10 cm.

### 4. CONCLUSIONES

Hemos presentado en esta comunicación un nuevo nudo, condensado, tridimensional y no ortogonal, para la simulación numérica del eje  $z$  en una red cilíndrica TLM. A este nudo, basado en un nudo cartesiano de dimensiones arbitrarias, podemos agregarle un número arbitrario de grupos de cuatro ramas que nacen radialmente del eje  $z$ , permitiendo un muestreo espacial más efectivo.

### 5. REFERENCIAS

- [1] Allen, R., Mallik, A., and Johns, P.: 'Numerical results for the symmetrical condensed TLM node', *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **MTT-35**, (4), pp. 378-382, 1987.
- [2] Allen, R., and Clark, M.J.: 'Application of the symmetrized transmission-line matrix method to the cold modelling of magnetrons', *Int. J. Numerical Methods: Electr. Networks, Devices and Fields*, **1**, pp. 61-70, 1988.
- [3] Meliani, H., De Cogan, D., and Johns, P.B.: 'The use of orthogonal curvilinear meshes in TLM nodes', *Int. J. Numerical Methods: Electr. Networks, Devices and Fields*, **1**, pp. 221-238, 1988.
- [4] Portí, J.A., Morente, J.A., and Carrión, M.C.: 'Simple derivation of scattering matrix for TLM nodes', *Electron. Lett.*, **34**, (18), pp. 1763-1764, 1988.
- [5] Trenkic, V., Christopoulos, C., and Benson, T.M.: 'Simple and elegant formulations of scattering in TLM nodes', *Electron. Lett.*, **29**, (18), pp. 1651-1652, 1993.
- [6] Morente, J.A., Giménez, G., Portí, J.A., and Khalladi, M.: 'Dispersion analysis for a TLM mesh of symmetrical condensed nodes with stubs', *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, **MTT-43**, (2), pp. 452-456, 1995.