

# El Elemento de Nédélec de Tercer Grado

A. J. Ruiz<sup>2</sup>, L. E. García<sup>1</sup>, M. Salazar<sup>2</sup>, T. K. Sarkar<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Alcalá (luise.garcia@uah.es)

<sup>2</sup>Universidad Politécnica de Madrid\*, <sup>3</sup>Syracuse University

## Abstract

The third-order version of Nédélec's first family of curl-conforming elements over simplices is presented. Following the definition of the element given by Nédélec, the third-order vector basis functions are deduced. The elements thus obtained exhibit some important differences with respect to other higher-order curl-conforming elements appeared in the literature. Among other features, the proposed third-order curl-conforming finite element leads to better conditioned Finite Element Method (FEM) matrices.

## 1 Introducción

Los elementos curl-conformes han demostrado ser los adecuados para la discretización del campo electromagnético con el Método de los Elementos Finitos (MEF). Entre los elementos curl-conformes cabe distinguir los de orden completo y los de orden mixto propuestos por Nédélec en [1]. La definición dada en [1] es excesivamente abstracta y no es directamente implementable, lo que ha dado lugar a diversas implementaciones que, si bien proporcionan aproximaciones de orden mixto, no siguen rigurosamente la definición dada en [1]. En la presente comunicación se presenta la implementación rigurosa del elemento de Nédélec de tercer grado. Es importante resaltar que éste presenta diferencias cualitativas respecto a los elementos de orden inferior de la familia ([2], [3], [4]). propuesta por los autores. Igualmente, el elemento que se presenta posee importantes diferencias respecto a los elementos de tercer grado propuestos por otros autores; entre otras, un mejor condicionamiento de las matrices a que da lugar.

## 2 El Elemento de Tercer Grado

La definición de elemento finito de [1] viene dada en términos de un dominio, un espacio de funciones y unos grados de libertad ( $g.l.$ ) como funcionales lineales sobre el espacio de funciones. A continuación se hace la presentación del elemento en el contexto 3D, es decir, para el tetraedro. La particularización a una cara de éste proporciona las correspondencias oportunas con el caso 2D (elemento triangular).

El espacio de funciones se denota  $\mathcal{R}^k$  y está formado por los polinomios vectores de orden  $k$  que satisfacen las denominadas *condiciones de Nédélec*. En el caso de or-

den 3,  $\mathcal{R}^3$  viene dado por

$$\mathcal{R}^3 \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_1 + a_2x + a_3y + a_4z \\ b_1 + b_2x + b_3y + b_4z \\ c_1 + c_2x + c_3y + c_4z \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} a_5x^2 + a_6y^2 + a_7z^2 + a_8xy + a_9xz + a_{10}yz \\ b_5x^2 + b_6y^2 + b_7z^2 + b_8xy + b_9xz + b_{10}yz \\ c_5x^2 + c_6y^2 + c_7z^2 + c_8xy + c_9xz + c_{10}yz \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} +Dx^2y - Ey^3 - Fz^3 + Gx^2z + Jy^2x + Kz^2x \\ -Dx^3 + Ey^2x - Hz^3 + Iy^2z - Jx^2y + Lz^2y \\ +Fz^2x - Gx^3 + Hz^2y - Iy^3 - Kx^2z - Ly^2z \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} +Mxyz - Oy^2z + Py^2z - Qz^2y + Rz^2y \\ -Mx^2z + Nx^2z + Oxyz - Rz^2x \\ -Nx^2y - Py^2x + Qxyz \end{array} \right\} \quad (1)$$

Nótese que la elección de un polinomio vector de  $\mathcal{R}^3$  implica fijar 45 coeficientes independientes. Por tanto, la dimensión de  $\mathcal{R}^3$  es 45 y el número de  $g.l.$  y de funciones de base vectoriales  $\bar{N}_j \in \mathcal{R}^3$  es también 45. En el caso del triángulo es fácil deducir que el número es 15 (sólo existen dos componentes y términos con  $x$  e  $y$ ). El paso siguiente es elegir 45 polinomios vectores de  $\mathcal{R}^3$  linealmente independientes. Ello se hace a partir de las definiciones de  $g.l.$  que se presentan en el párrafo siguiente. Es importante resaltar que la definición de los  $g.l.$  del elemento (ignorada por algunos autores) es fundamental en la comprensión de cómo deben imponerse las condiciones de contorno, e igualmente, permite simplificar los postprocesos. Las funciones de base vectoriales se obtienen imponiendo el carácter interpolatorio de las mismas respecto de la definición de los  $g.l.$ , es decir, imponiendo las relaciones  $g_i(\bar{N}_j) = \delta_{ij}$ , ( $i = 1 \dots 45$ ), donde  $g_i$  se refiere al  $i$ -ésimo funcional definido como el  $i$ -ésimo  $g.l.$  del elemento. De este modo, la unisolvencia del elemento [1] implica que las funciones de base obtenidas son linealmente independientes. Nótese que  $g_i(\bar{N}_j) = \delta_{ij}$  constituye para cada función de base un sistema de 45 ecuaciones con los 45 coeficientes de (1) como incógnitas.

La definición de los grados de libertad del elemento de Nédélec de tercer orden es la siguiente: 18  $g.l.$  asociados a las 6 aristas del tetraedro (3  $g.l.$  por arista) definidos como  $\int_{edge} (\bar{u} \cdot \hat{\tau}) q dl$ ,  $\forall q \in P_2$ , 24  $g.l.$  asociados a las 4 caras del tetraedro (6  $g.l.$  por cara) definidos como  $\int_{face} (\hat{n} \times \bar{u}) \cdot \bar{q} ds$ ,  $\forall \bar{q} \in (P_1)^2$ , y 3  $g.l.$  asociados al volumen del tetraedro definidos como  $\int_{\Omega} (\bar{u} \cdot \bar{q}) d\Omega$ ,  $\forall \bar{q} \in (P_0)^3$ , donde  $\bar{u}$  denota al vector incógnita (típicamente campo eléctrico o magnético),  $(P_k)^n$  al espacio de polinomios de orden  $k$  en  $n$ -dimensiones,  $\hat{\tau}$  al vector unitario en la dirección de la arista, y  $\hat{n}$  al vector unitario normal a la cara. En el caso del elemento triangular se

\*Este trabajo ha sido financiado en parte por el proyecto CYCIT TIC99-1172-C02-01

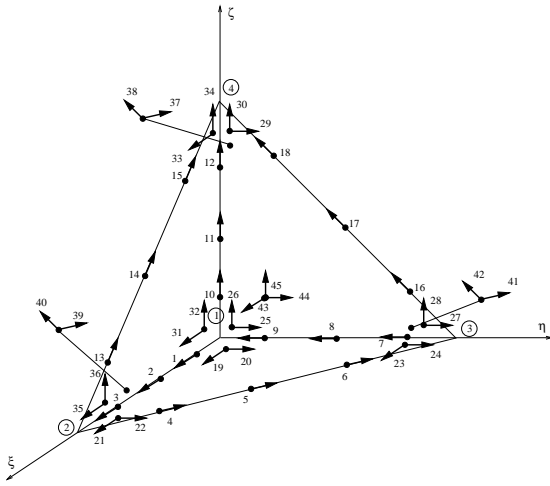


Figura 1: Tetraedro de tercer grado (elemento de referencia)

tienen 9 *g.l.* asociados a las aristas (3 *g.l.* por arista) y 6 *g.l.* asociados al área del triángulo (*g.l.* internos).

Nótese que las definiciones de *g.l.* anteriores no son directamente implementables. La implementación práctica de dichos *g.l.* pasa por la elección de bases para cada uno de los espacios  $P_2$ ,  $(P_1)^2$ ,  $(P_0)^3$ , lo que implica la elección de 2 y 3 direcciones para los vectores  $\bar{q} \in (P_1)^2$  y  $\bar{q} \in (P_0)^3$ , respectivamente, y la elección de bases de polinomios escalares (monomios, polinomios de Lagrange, etc). De este modo, la definición de *g.l.* se hace finalmente en términos de *momentos* sobre las componentes de  $\bar{u}$  oportunas. Nótese que los *g.l.* asociados al volumen no están presentes en los elementos de grado inferior a 3 y que los *g.l.* asociados a las caras en el caso del elemento de tercer grado son momentos de hasta orden 1 (de orden 0 en el elemento de segundo grado). Por último, hay que destacar que los *g.l.* de las aristas pueden definirse en base al valor de la componente de  $\bar{u}$  tangencial a éstas en ciertos puntos (nodos), es decir, en base a  $(\bar{u}|_{\text{nodo}} \cdot \hat{\tau})$ .

La Figura 1 muestra el elemento de referencia del tetraedro de tercer grado que se presenta en esta comunicación. Corresponde a la elección de direcciones ortogonales para los vectores  $\bar{q} \in (P_1)^2$  y  $\bar{q} \in (P_0)^3$  y nodos de las aristas en los puntos de Gauss-Legendre de éstas. El elemento de referencia del triángulo de tercer grado se obtiene considerando una cara cualquiera del tetraedro.

En la Figura 2 se muestran los dibujos de una función de arista y otra de cara, en donde se ha considerado (y también para los resultados posteriores) una base de Lagrange para  $\bar{q} \in (P_1)^2$ . Se han elegido dibujos bidimensionales por claridad; en concreto, se representa la componente tangencial a la cara  $\zeta = 0$ . De este modo, los dibujos son ejemplos también de los dos tipos de funciones de base del elemento triangular (de arista y de área).

### 3 Resultados y Conclusiones

En la Tabla 1 se muestra una comparación del condicionamiento de las funciones de base correspondiente al elemento tetraédrico de tercer grado presentado en esta comunicación y a otras implementaciones aparecidas en la literatura. El condicionamiento de las funciones de base se refiere al número de condicionamiento de la matriz correspondiente a los productos internos de dichas funciones en el elemento de referencia. El número de condicionamiento de la matriz se ha definido como la relación

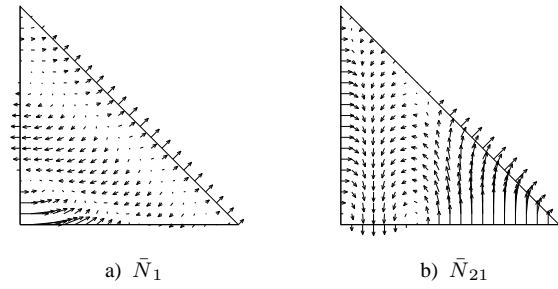


Figura 2: Ejemplo de funciones de base de arista y de cara — componente tangencial a la cara—

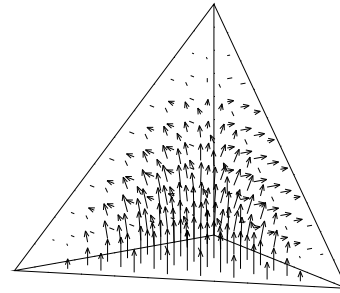


Figura 3: Ejemplo de función de base de volumen ( $\bar{N}_{45}$ )

EL. propuesto	2380
El. [5]	24986
El. [6]	17270
El. [7]	51121

Tabla 1: Números de condicionamiento

entre los autovalores máximo y mínimo de la matriz. Como se observa en la tabla, el número de condicionamiento correspondiente al elemento de tercer grado propuesto en esta comunicación es un orden de magnitud menor que el de los otros elementos de tercer grado comparados. Este menor número de condicionamiento tiene consecuencias numéricas beneficiosas en la etapa de resolución del sistema de ecuaciones a que da lugar el MEF, permitiendo un análisis más eficiente de las complejas estructuras y dispositivos de microondas y ondas milimétricas actuales.

### Referencias

- [1] J. C. Nédélec. “Mixed Finite Elements in  $R^3$ .” *Numerische Mathematik*, 35:315–341, 1980.
- [2] F. Blanc-Castillo, M. Salazar-Palma, y L. E. García-Castillo. “Linear and Second Order Edge-Lagrange Finite Elements for Efficient Analysis of Waveguiding Structures with Curved Contours.” *25th European Micr. Conf.*, pp. 444–448. Sep. 1995.
- [3] M. Salazar-Palma, T. K. Sarkar, L. E. García-Castillo, T. Roy, y A. R. Djordjevic. *Iterative and Self-Adaptive Finite-Elements in Electromagnetic Modeling*. Artech House, 1998.
- [4] L. E. García-Castillo y M. Salazar-Palma. “Second-Order Nédélec Tetrahedral Element for Computational Electromagnetics.” *Int. J. Num. Model. Elect. Net. Dev. Fields*, 13:261–287, 2000.
- [5] J. S. Savage y A. F. Peterson. “Higher-Order Vector Finite Elements for Tetrahedral Cells.” *IEEE Trans. MTT*, 44(6):874–879, Jun. 1996.
- [6] L. S. Andersen y J. L. Volakis. “Hierarchical Tangential Vector Finite Elements for Tetrahedra.” *IEEE MGWL*, 8(3):127–129, Mar. 1998.
- [7] R. D. Graglia, et al. “Higher Order Interpolatory Vector Bases for Computational Electromagnetics.” *IEEE Trans. AP*, 45(3):329–342, Mar. 1997.