

# ALGORITMO SENCILLO PARA EL DISEÑO DE FILTROS QMF DE RECONSTRUCCIÓN PERFECTA

Fernando Martín Rodríguez

Francisco Parada Loira

Departamento de Tecnologías de las Comunicaciones  
Universidad de Vigo

Fmartin@tsc.uvigo.es

fparada@tsc.uvigo.es

## RESUMEN

El propósito de este trabajo es el diseño de filtros FIR QMF (Quadrature Mirror Filters) de reconstrucción perfecta y número impar de coeficientes (orden par). Además, estos filtros tienen fase lineal y retardo entero. Estas parejas de filtros tienen muchas aplicaciones en las codificaciones tipo wavelet y en las descomposiciones multifrecuencia.

## 1. INTRODUCCIÓN

El esquema fundamental para nuestro estudio será el típico para filtros QMF de dos canales:

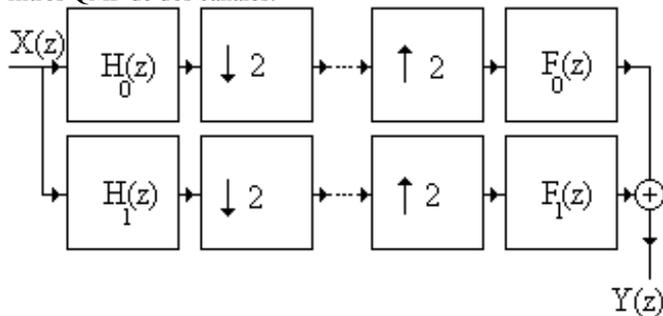


Figura 1. Diagrama de bloques general.

En la figura puede verse un banco de análisis (filtros H) y otro de síntesis (filtros F). Estamos suponiendo un caso ideal en el que la codificación y transmisión de la información no introducen ninguna pérdida. Éste es el modelo adecuado cuando nos importan sólo los filtros. Se puede demostrar fácilmente que la salida  $Y(z)$  se puede hallar como:

$$Y(z) = 1/2[H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)]X(z) + 1/2[H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)]X(-z) \quad (1)$$

Se suelen elegir los filtros F de reconstrucción de la siguiente manera:  $F_0(z) = H_1(-z)$  y  $F_1(z) = -H_0(z)$ . Con esto se consigue eliminar la componente en  $X(-z)$  y se puede afirmar que  $Y(z) = T(z)X(z)$ , (el conjunto se convierte en un único sistema LTI) donde  $T(z)$  viene dado por:

$$T(z) = 1/2[H_0(z)H_1(z) - H_1(z)H_0(-z)] \quad (2)$$

Nuestro objetivo es que  $T(z)$  sea un retardo (reconstrucción perfecta). Debe notarse que existen filtros  $H_0$  y  $H_1$  que cumplen

esa condición pero que no dividen a la señal en subbandas. Estos filtros son llamados "soluciones triviales" y aunque son de reconstrucción perfecta no tienen utilidad práctica alguna. Desearíamos que los filtros  $H_0$  y  $H_1$  se pareciesen lo más posible a filtros ideales paso-bajo y paso-alto respectivamente.

Existen sólo tres posibilidades para tener filtros de reconstrucción perfecta y fase lineal [1]:

- a) Ambos filtros son simétricos de longitudes impares y la diferencia de sus longitudes es un múltiplo impar de 2.
- b) Un filtro es simétrico y el otro antisimétrico, ambas longitudes son pares y su diferencia es un múltiplo par de 2 (posiblemente 0).
- c) Un filtro es de longitud impar y el otro par, ambos tienen todos sus ceros en el círculo unidad. Y ambos son simétricos o bien uno es simétrico y el otro antisimétrico (en este tercer caso sólo se obtienen soluciones triviales).

El caso b) es el conocido en la literatura clásica sobre el tema [2] y el caso a) evidentemente es el que nos ocupa.

## 2. MÉTODO DE DISEÑO

### 2.1. Método Inicial

Vamos a definir  $P(z) = H_0(z)H_1(-z)$ , según la ecuación 2,  $T(z) = 1/2[P(z) - P(-z)]$ . Trivialmente, en esta resta las potencias pares se anulan mientras que las impares salen multiplicadas por 2. Nuestro objetivo es que  $T(z)$  sea un retardo, es decir: queremos que todos los términos impares de  $P(z)$  sean nulos (excepto el central).

De aquí deducimos el siguiente método de diseño: diseñar primero un filtro paso-bajo  $H_0$  con  $2n+1$  coeficientes (además, debe ser simétrico para tener fase lineal). Consideraremos que existe una pareja paso-alto  $H_1$  de  $2n-1$  coeficientes a determinar.

Para determinarlos se plantean las ecuaciones que permitan anular todos los términos del producto  $P(z)$  salvo el central. Teniendo en cuenta que todos los polinomios implicados son simétricos se tienen  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. Dado  $H_0$ ,  $H_1$  es único salvo por un factor de escala.

Si se procede con este método tal cual, los resultados no serán buenos. La calidad de  $H_0$  será la del método que se emplee para diseñarlo; sin embargo,  $H_1$  saldrá defectuoso. El filtro resultante tiene una respuesta adecuada en banda de paso pero presenta un

pico en  $w=0$ . En el siguiente punto, veremos como se puede corregir esta situación.

## 2.2. Refinamiento

El refinamiento se basa en buscar otros  $H_1$ 's válidos con más coeficientes. Se puede demostrar [3] que estos otros filtros se pueden hallar a partir del primer  $H_1$  usando la expresión:

$$H_1'(z) = z^{-2m}H_1(z) + E(z)H_0(z) \quad (3)$$

Donde  $E(z)$  es cualquier polinomio simétrico y de orden  $2m$  que tiene sólo potencias pares ( $m$  coeficientes distintos y no nulos). Viendo la ecuación de 3 se puede observar que se le suma a  $H_1$  un término proporcional a  $H_0$ , es decir: ese término es paso bajo (y puede corregir los defectos de  $H_1$  en la banda de detención).

Tomando  $m=1$ ,  $E(z)$  depende de un único escalar y es fácil ajustar el valor de dicho escalar para eliminar el pico en 0. De hecho, escogiendo el valor adecuado para provocar un cero de transmisión en  $w=0$ , se obtienen buenos resultados (ver sección 3).

Realizando pruebas con filtros de muchos coeficientes aparece un segundo pico en la banda de detención del primer  $H_1$ . En estos casos, es preciso una corrección con  $m=2$ . Si se descompone  $E(z)H_0(z)$  en suma de dos términos:  $e_2z^{-2}H_0(z)$  (pico en 0) y  $e_0(1+z^{-4})H_0(z)$  (con dos picos), se puede plantear un sistema de 2 ecuaciones lineales para asegurar ceros de transmisión en  $w=0$  y en la frecuencia del segundo pico. Este método puede generalizarse,  $m$  debe ser igual al número de picos que queremos eliminar ( $m$  será el tamaño del sistema lineal a resolver y el número de ceros de transmisión a introducir).

## 3. RESULTADOS

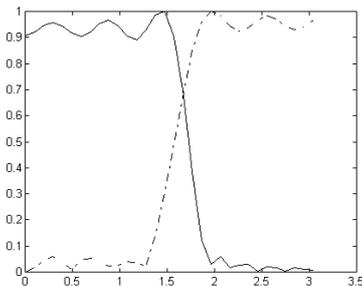


Figura 2. Resultados para ventana rectangular.

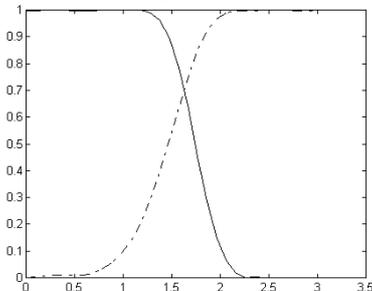


Figura 3. Resultados para ventana Hamming.

Empezamos probando con un diseño de  $H_0$  muy simple (eneventanado con ventana rectangular). Para  $n=10$  (21 coeficientes en el paso-bajo) y  $m=1$  se obtuvo el resultado de la figura 2. Se puede ver que la caída es fuerte pero hay bastante rizado en banda de paso. Si cambiamos a ventana de Hamming se suaviza el rizado pero se paga en la caída (figura 3,  $n$  y  $m$  se mantienen). La ventana gaussiana nos da un punto intermedio (figura 4,  $n$  y  $m$  se mantienen).

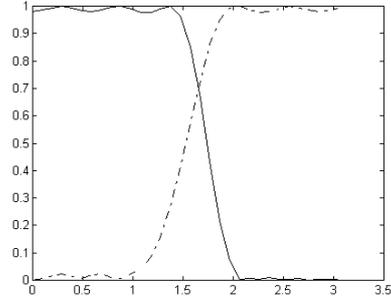


Figura 4. Resultados para ventana gaussiana.

Por último (figura 5), veremos los resultados con ventana de Kaiser ( $n=20$ , 41 coeficientes en el paso bajo,  $m=2$ ).

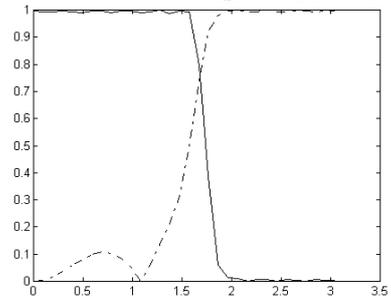


Figura 5. Resultados para ventana de Kaiser.

## 4. CONCLUSIONES

Hemos diseñado filtros que cumplen las especificaciones con un método muy simple. El comportamiento de los mismos es aceptable y las aplicaciones prácticas son muchas: wavelets, otras descomposiciones multifrecuencia.

## 5. REFERENCIAS

- [1] P.P. Vaydyanathan. "Quadrature Mirror Filter Banks, M-Band Extensions and Perfect Reconstruction Techniques". IEEE Transactions on Communications.
- [2] R. E. Crochiere, L. R. Rabiner. "Multirate Digital Signal Processing". Prentice Hall.
- [3] M. Vetterly et al. "Wavelets and Filter Banks: Theory and Design". IEEE Transactions on Communications.