

# CONFORMACIÓN ÓPTIMA DE SEÑALES DE COMUNICACIONES CON SPLINES CÚBICOS

José Díez, Jesús Ibáñez, Carlos Pantaleón, Ignacio Santamaría

Dpto. Ing. Comunicaciones, ETSII y Telecomunicación, Universidad de Cantabria  
Avenida de los Castros, 39005 Santander, Spain  
jose@gtas.dicom.unican.es

## ABSTRACT

In this paper, we propose a digital communication system based in the cubic spline interpolation. The scheme achieves an intersymbol-interference-free matched reception with triangles as pulse-shaping filters.

The system improve the performance of rectangular pulse-shaping, and even it can be an alternative to the raised cosine when the computational cost is an important issue in system design.

## 1. INTRODUCCIÓN

En comunicaciones digitales, cuando el canal está limitado en banda, es importante utilizar formas de onda que no provoquen interferencia entre símbolos (ISI) en el receptor después del filtro adaptado. El primer criterio de Nyquist [1] establece que, para conseguir una transmisión sin ISI, la respuesta al impulso equivalente de los filtros transmisor y receptor debe pasar por cero en múltiplos del tiempo de símbolo  $T_s$ . De entre los filtros que cumplen este criterio destaca el coseno alzado, utilizado en muchos sistemas comerciales donde la ISI es un problema a tener en cuenta. Sin embargo, debido al elevado coste computacional de este tipo de filtros, en ocasiones se realizan aproximaciones más sencillas basadas, por ejemplo, en pulsos rectangulares, que minimizan la complejidad a costa de un espectro con peores características y de permitir una cierta ISI.

En este trabajo se propone un sistema de comunicaciones digitales libre de interferencia entre símbolos basado en la interpolación mediante splines cúbicos. Su principal ventaja es el bajo coste computacional que requiere, lo cual permite que sea una alternativa válida al coseno alzado en ciertas aplicaciones. Además, el sistema tiene un espectro con mejores características que los que utilizan pulsos rectangulares como filtros conformadores con un moderado incremento de la complejidad.

## 2. INTERPOLACIÓN CON SPLINES CÚBICOS

Los splines, segmentos de polinomios unidos entre sí mediante condiciones de suavidad en la función y en sus derivadas, son utilizados habitualmente para interpolar muestras equiespaciadas de una función. Un resultado importante [2] es que las muestras de una señal discreta  $s(k)$  se pueden representar en función de los llamados B-splines:

$$s(k) = \sum_{l \in Z} c(l) \beta^n(x-l) \Big|_{x=k} \quad (1)$$

Donde  $c(l)$  son los coeficientes del modelo B-spline, y  $\beta^n(x)$  es el B-spline de grado  $n$  que se obtiene convolucionando  $n$  veces un pulso rectangular (B-spline de grado cero) [3]:

$$\beta^n(x) = \underbrace{\beta^0 * \beta^0 * \dots * \beta^0}_{(n+1) \text{ veces}}(x) \quad (2)$$

A partir de esto, dadas las muestras  $s(k)$  de una señal, hay que obtener los coeficientes  $c(l)$  para que quede definido el modelo B-spline. Se demuestra en [3] que estos coeficientes se pueden calcular con la siguiente convolución:

$$c(k) = h(k) * s(k) \quad (3)$$

Donde  $h(k)$  es el llamado filtro B-spline directo. Este filtro puede implementarse fácilmente mediante un sistema formado por dos filtros IIR (respuesta al impulso infinita) en cascada, uno causal y otro anticausal [4]. En el sistema de comunicaciones propuesto se utiliza el spline cúbico, cuyo B-spline resulta de la convolución de dos triángulos (B-spline de grado 1). Para este caso, la respuesta al impulso del filtro para calcular los coeficientes B-spline es la siguiente [3]:

$$h(k) = -6 z_1 \left( z_1^k u[k] * z_1^{-k} u[-k] \right) \quad k \in Z \quad (4)$$

Donde  $z_1 = -2 + \sqrt{3}$  y  $u[k]$  es la función escalón. El filtro está formado por una parte causal y otra anticausal. Por otro lado, hay que destacar que este filtro es de respuesta al impulso infinita (IIR), por lo que para ser implementado es necesario truncarlo. Sin embargo, los coeficientes del filtro tienden rápidamente a cero según aumenta  $|k|$ , por lo que el error cometido al truncar es despreciable.

## 3. SISTEMA DE COMUNICACIONES DIGITALES BASADO EN EL SPLINE CÚBICO

### 3.1. Estructura del sistema

En la Figura 1 se puede observar el esquema de comunicaciones digitales basado en el spline cúbico descrito anteriormente y con el que se han realizado las simulaciones:

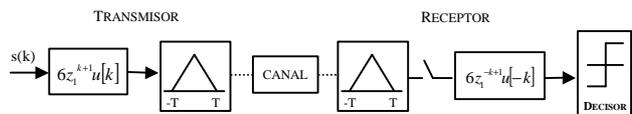


Figura 1. Sistema de comunicaciones con splines cúbicos.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado a través del proyecto FEDER 1FD97-1066-C02-01

Se parte de una señal binaria polar  $s(k)$ . El filtro B-spline directo se ha dividido en dos, colocando la parte causal en el transmisor y la anticausal en el receptor. De esta manera se consigue que el receptor esté adaptado. Como filtros conformadores se utilizan triángulos (B-spline de grado 1). La convolución de los filtros triangulares del transmisor y del receptor da como resultado el B-spline de orden 3, con lo que el sistema global interpola las muestras  $s(k)$  con splines cúbicos. De esta manera, muestreando adecuadamente, en el receptor se puede recuperar la información sin interferencia entre símbolos (ISI). En definitiva, se ha conseguido un sistema que utiliza triángulos como filtros conformadores y sin ISI. El sistema se completa simulando el canal introduciendo ruido blanco gaussiano a la entrada del receptor.

Una de las principales ventajas de esta estructura es el bajo coste computacional que se requiere. Por un lado, los filtros triangulares pueden ser fácilmente implementados mediante integradores. Por otro, la longitud de los filtros causal y anticausal de la expresión (5) no es necesario que sea muy grande, como se demuestra a continuación.

### 3.2. Número de coeficientes de los filtros

Para fijar el número mínimo de coeficientes de estos filtros, se simuló el sistema anterior, obteniéndose gráficas de probabilidad de error de bit en función de  $E_b/N_o$ . Los resultados se muestran en la Figura 2.

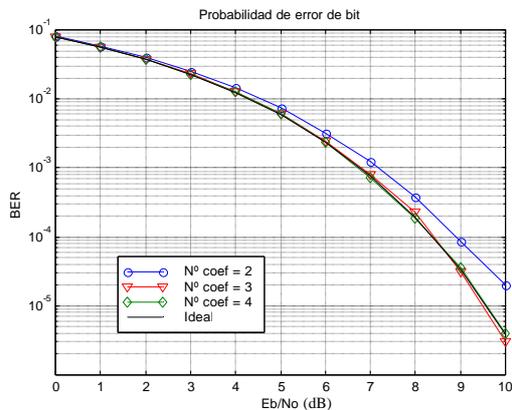


Figura 2. Probabilidad de error frente a  $E_b/N_o$  para distintas longitudes de los filtros.

Se observa que el número de coeficientes óptimo para minimizar el coste computacional sin pérdidas es de 3 para cada uno de los filtros: el causal del transmisor y el anticausal del receptor. En este caso, la curva de BER ya coincide con la ideal.

### 3.3. Espectro

Como se observa en la Figura 3, el espectro de la señal en línea tiene una diferencia entre el lóbulo principal y el secundario de 22 dB. Esto mejora en 9 dB el espectro resultante al conformar con pulsos rectangulares, el cual tiene una diferencia entre lóbulos de 13 dB.

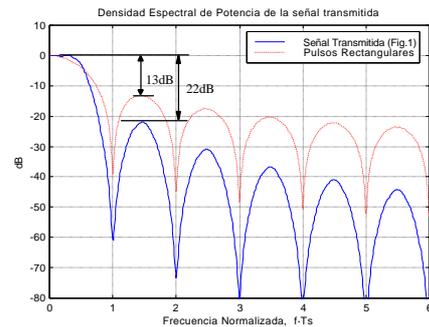


Figura 3. D.E.P. de la señal transmitida

### 3.4. Diagrama de ojo

Finalmente, se presenta en la Figura 4 el diagrama de ojo después del filtro adaptado. En él se aprecia como en el instante óptimo de muestreo no hay interferencia entre símbolos.

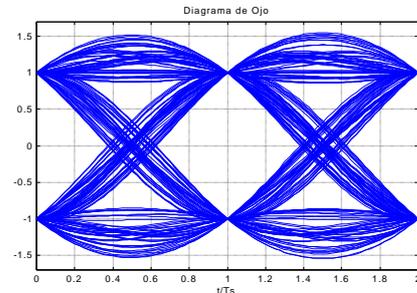


Figura 4. Diagrama de ojo

## 4. CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto un sistema de comunicaciones digitales que, basándose en la teoría de splines, utiliza triángulos como filtros conformadores y está libre de interferencia entre símbolos.

Entre las ventajas que presenta este sistema destaca su bajo coste computacional, lo cual resulta útil en aplicaciones donde este parámetro sea crítico. Por otro lado, es una alternativa muy interesante en sistemas que utilicen conformación rectangular, ya que presenta lóbulos secundarios más bajos, no tiene ISI y su implementación tiene una complejidad ligeramente superior.

## 5. REFERENCIAS

- [1] H. Nyquist, "Certain topics on telegraph transmission theory", *Trans. AIEE*, vol. 47, pp. 617-644, 1928.
- [2] I. J. Schoenberg, "Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions", *Quart. Appl. Math.*, vol 4, pp. 45-99, 112-141, 1946.
- [3] M. Unser, "Splines: A Perfect Fit for Signal and Image Processing", *IEEE Signal Processing Magazine*, pp. 22-38, November 1999.
- [4] M Unser, A. Aldroubi, M. Eden, "B-spline signal processing: Part II-efficient design and applications", *IEEE Trans. Signal Processing.*, vol 41, no.2, pp. 834-848, 1993.