MODELADO AR(1) USANDO MAPAS CAÓTICOS LINEALES A TRAMOS

David Luengo García *Carlos Pantaleón Prieto* *Ignacio Santamaría Caballero*

Departamento de Ingeniería de Comunicaciones
Universidad de Cantabria
david@gtas.dicom.unican.es carlos@gtas.dicom.unican.es nacho@gtas.dicom.unican.es

RESUMEN

Las señales caóticas, señales generadas por un sistema no lineal en estado caótico, resultan útiles para el modelado de muchos fenómenos naturales. En este artículo se propone el modelado con una familia de ecuaciones en diferencias de primer orden cuya autocorrelación es idéntica a la de un proceso autorregresivo de primer orden AR(1). Debido al gran coste computacional y la inconsistencia del estimador de máxima verosimilitud (ML) del modelo se considera un esquema de estimación subóptimo dividido en dos partes: estimación del parámetro del mapa, y estimación de la secuencia. Las simulaciones realizadas muestran el buen comportamiento de la alternativa propuesta.

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos años se está realizando un gran trabajo en la aplicación de la teoría del caos en diversos campos. El modelado de series temporales obtenidas a partir de fenómenos naturales es un área en el que las señales caóticas pueden resultar de interés debido a sus características. Por ejemplo, la extrema dependencia a las condiciones iniciales dificulta la estimación de los parámetros con los que se ha generado una señal caótica, pero permite modelar comportamientos anómalos de señales reales durante breves intervalos de tiempo [1]. Se han usado modelos caóticos con señales de voz [1], biomédicas [2], o del ruido coloreado presente en medidas de radar marino [3].

La aplicación de modelos caóticos depende de la existencia de una familia de mapas caóticos que permitan modelar un amplio conjunto de señales. Para permitir el modelado caótico de cualquier señal se debe buscar el equivalente caótico de los modelos ARMA. Las señales generadas por mapas lineales a tramos (PWL) de Markov pueden considerarse modelos ARMA caóticos debido a su espectro racional [4]. Sin embargo, aún se desconoce si resulta posible construir procesos ARMA caóticos para cualquier espectro deseado. Además, aunque existe una expresión cerrada para el estimador ML de la señal con un parámetro conocido para cualquier mapa PWL [5], la estimación del parámetro se basa aún en métodos subóptimos.

En este artículo se desarrollan estimadores del parámetro y la señal para una familia de mapas caóticos cuya función de autocorrelación es idéntica al modelo AR(1), por lo que se le puede considerar como el modelo caótico AR(1). Se considera el estimador ML del modelo, pero su elevado coste computacional y su inconsistencia desaconsejan su uso. En consecuencia se propone una alternativa de estimación en dos pasos: estimación del parámetro del mapa minimizando el error cuadrático entre cada pareja de muestras, y estimador ML de la secuencia para el parámetro obtenido de la etapa anterior. Este esquema de estimación proporciona un buen resultado con un coste computacional razonable.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Las señales consideradas se generan iterativamente de acuerdo a

$$x[n+1] = F(x[n]) \tag{1}$$

donde F(·) en este caso es el skew tent-map

$$F(x) = \begin{cases} x/a & 0 \le x < a \\ (1-x)/(1-a) & a \le x \le 1 \end{cases} \tag{2}$$

con $0<a<1$. Este es un caso particular de un mapa PWL [5] con dos únicos intervalos: $E_1=[0,a)$ y $E_2=[a,1]$, y parámetros $a_1=1/a$, $b_1=0$, $a_2=-1/(1-a)$ y $b_2=1/(1-a)$. Mediante esta partición a la señal generada de acuerdo a (1) se le puede asociar una secuencia simbólica o de signos $\mathbf{s}=s[0]$ ... $s[N-1]$, con $s[k]=i \Leftrightarrow F^{(n)} \in E_i$. Este mapa produce secuencias caóticas con una densidad invariante $p(x)$ uniforme en [0,1], y una autocorrelación [6]

$$R_{xx}[m] = r_0 c^m \tag{3}$$

con $r_0=1/12$ y $c=2a-1$ [6]. Por consiguiente, las señales caóticas generadas de acuerdo a (1) usando (2) tienen propiedades estadísticas equivalentes a las de los modelos AR(1).

3. ESTIMACIÓN DEL MODELO

El problema considerado en este artículo es el de obtener el modelo óptimo para una secuencia de datos en ruido

$$y[n] = x[n] + w[n] \qquad n = 0,1,\ldots,N \tag{4}$$

con $w[n]$ ruido aditivo blanco Gaussiano estacionario de media nula y varianza s^2. La obtención del modelo óptimo en el sentido de máxima verosimilitud (ML) requiere hallar el parámetro a y la condición inicial $x[0]$ que minimicen [7]

$$J(x[0],a) = \sum_{n=0}^{N} \left(y[n] - F^{(n)}(x[0],a)\right)^2 \tag{5}$$

La única solución conocida de (5) consiste en probar las 2^N combinaciones de signos posibles y estimar a y $x[0]$ para cada una de ellas. Esta solución resulta muy costosa computacionalmente, por lo que se considera un esquema de estimación basado en la estimación primero de a, y a continuación de $x[0]$.

3.1. Estimación del parámetro

Se puede obtener una estima del parámetro *a* minimizando el error entre una muestra y la siguiente. De forma vectorial, la superficie de error a minimizar es [7]

$$J_{\mathbf{s}}(\hat{a}_{\mathbf{s}}) = \left\| (\mathbf{I} - \mathbf{z}E_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{z}^T)\mathbf{d}_{\mathbf{s}} \right\|_2^2 = \left\| \mathbf{E}\mathbf{d}_{\mathbf{s}} \right\|_2^2 \tag{6}$$

con **s** el vector con los signos de $y[0]...y[N]$, $E_{\mathbf{z}}=\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{z}$ la norma al cuadrado del vector $\mathbf{z}=[y[1] \ ... \ y[N]]^{\mathrm{T}}$, y $\mathbf{d}_{\mathbf{s}}=[d[0] \ ... \ d[N\text{-}1]]^{\mathrm{T}}$, con $d[k]=y[k]+(s[k]\text{-}1)(y[k+1]\text{-}1)$. El estimador de mínimos cuadrados (LS) es aquel que minimiza (6) para una de las 2^N posibles combinaciones de signos. Sin embargo, en una situación de SNR moderada-alta resulta razonable considerar sólo los N+2 itinerarios posibles obtenidos ordenando las muestras disponibles y dividiéndolas en dos conjuntos continuos. Así obtenemos el estimador HCLS (“Hard-Censoring” LS), que viene dado por

$$\hat{a}_{\mathbf{s}(\mathrm{HCLS})} = E_{\mathbf{z}}^{-1}\mathbf{z}^T\mathbf{d}_{\mathbf{s}} \tag{7}$$

Dado que **E** no depende de **s** sólo debe calcularse una vez, construir N+2 vectores $\mathbf{d}_{\mathbf{s}}$, aplicar (6) en N+2 ocasiones, y calcular (7) para la secuencia de signos que minimice (6).

3.2. Estimación de la señal

Una vez obtenida una estima del parámetro *a* se puede aplicar el estimador ML [5] para obtener la secuencia completa. En este caso se estima $x[N]$ en lugar de $x[0]$ para evitar la inestabilidad numérica característica de la generación de señales caóticas, por lo que es necesaria una expresión cerrada para $F^{(-n)}(\cdot)$

$$F_{\mathbf{s}}^{(-\mathbf{n})}(x[N]) = \left(A_{\mathbf{s}}^{n,N}\right)^{-1} x[N] - \sum_{l=0}^{n-1} \left(A_{\mathbf{s}}^{l+1,N-n+l+1}\right)^{-1} b_{s[N-n+l]} \tag{8}$$

siendo

$$A_{\mathbf{s}}^{l,k} = \prod_{n=k-l}^{k-1} a_{s[n]} \tag{9}$$

y $A_{\mathbf{s}}^{0,k}=1$. Puesto que (8) es una función lineal en $x[N]$, la superficie de error resulta cuadrática, y el estimador ML de $x[N]$ se obtiene directamente derivando (8) e igualando a cero:

$$\hat{x}[N] = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} \left(y[n] + \sum_{l=0}^{N-n-1} \left(A_{\mathbf{s}}^{l+1,n+l+1}\right)^{-1} b_{s[n+l]} \right) \left(A_{\mathbf{s}}^{N-n,N}\right)^{-1}}{\sum_{n=0}^{N-1} \left(A_{\mathbf{s}}^{l+1,n+l+1}\right)^{-2}} \tag{10}$$

El resto de la secuencia se obtiene iterando hacia atrás usando (8) con el parámetro y la secuencia de signos del apartado anterior.

4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

Se ha realizado un análisis de Montecarlo con 1000 simulaciones para diferentes valores del parámetro *a* y relación señal a ruido (SNR) usando una secuencia de 100 muestras con una condición inicial aleatoria. En la figura 1 se muestra el error cuadrático medio (MSE) para diferentes valores de *a* y SNR. Los peores resultados de modelado se dan en los extremos (*a*=0.1 y *a*=0.9), y los mejores para *a*=0.5, aunque el MSE del modelo siempre mejora la SNR de la señal original.

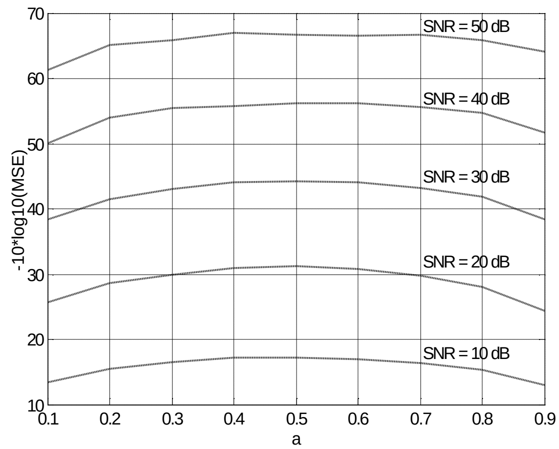

Figura 1. *MSE para diferentes valores de a y SNR*

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha mostrado un modelo caótico alternativo a los modelos AR(1), y se ha desarrollado un esquema de estimación del modelo. Se ha considerado el estimador ML del modelo, pero su elevado coste computacional e inconsistencia desaconsejan su uso. Por tanto se ha planteado un método de estimación en dos etapas: estimación del parámetro *a* y la secuencia de signos (HCLS), y estimación ML de la secuencia para el parámetro y secuencia de signos anteriores. Este esquema de estimación proporciona un buen resultado con un coste computacional razonable. Entre las futuras líneas de investigación se encuentran buscar los modelos AR(p) y ARMA caóticos, y obtener estimadores para dichos modelos.

6. REFERENCIAS

[1] T.F. Quatieri, E.M. Hofstetter, “Short-time signal representation by nonlinear difference equations”, *Proc. ICASSP 90*, pp. 1551-1554, 1990.

[2] Metin Akay, *Nonlinear biomedical signal processing – Volume II: Dynamic analysis and modeling*, IEEE Press Series on Biomedical Engineering, New York, 2001.

[3] S. Haykin, X.B. Li, “Detection of signals in chaos”, *Proc. of the IEEE*, vol. 83, no. 1, pp. 95-122, 1995.

[4] S.H. Isabelle, G.W. Wornell, “Statistical analysis and spectral estimation of one-dimensional signals”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 45, no. 6, pp. 1495-1506, 1997.

[5] C. Pantaleón, D. Luengo, I. Santamaría, “Optimal estimation of chaotic signals generated by piecewise-linear maps”, *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, no. 8, pp. 235-237, 2000.

[6] H. Sakai, H. Tokumaru, “Autocorrelation of a certain chaos”, *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 28, no. 5, pp. 588-590, 1980.

[7] C. Pantaleón, D. Luengo, I. Santamaría, “Chaotic AR(1) model estimation”, *Proc. ICASSP 2001*.