

PROPIEDADES DE LA MATRIZ DE DISPERSIÓN GENERALIZADA DE UNIONES Y DISCONTINUIDADES EN GUÍA DE ONDA

Jorge A. Ruiz Cruz, Jesús M. Rebollar Machain

Departamento de Electromagnetismo y Teoría de Circuitos
Universidad Politécnica de Madrid
jorgerc@etc.upm.es, jmrm@etc.upm.es

ABSTRACT

The Generalized Scattering Matrix (GSM) is an usual way to characterize a waveguide junction. Regardless of the geometry and the technique used to calculate it, the GSM has some properties that are slightly different from the circuital ones due to the presence of evanescent modes. In this paper these properties are reviewed and its relation with the GSM of a transversal discontinuity obtained by Mode-Matching (MM) is investigated. In this particular case, the properties can never be used to check that the analysis has been carried out rightly.

1. INTRODUCCIÓN

La caracterización de un dispositivo pasivo en guía de onda se realiza normalmente con matrices de parámetros multimodo generalizadas. En cada puerta física del problema se considera tanto al modo fundamental como a los modos superiores (independientemente de si están propagándose o están al corte) y mediante una matriz se representa la relación que existe entre los diferentes modos de las puertas del sistema.

Independientemente del dispositivo en particular que se esté considerando (2D ó 3D) e independientemente de la técnica (normalmente numérica) que se haya utilizado para obtener la matriz generalizada, ésta debe verificar una serie de propiedades. Algunas son análogas a las clásicas de circuitos [1], pero otras, debido a que se están considerando modos evanescentes, adquieren una forma diferente [2].

El objetivo de esta comunicación es clarificar cuáles son esas propiedades y en que medida se pueden utilizar para comprobar la validez de un análisis electromagnético. El estudio se centra en la Matriz de Dispersión Generalizada (MDG), pero de la misma manera se procedería para la matriz de admitancia o de impedancia.

1.1. Uniones en guía de onda

La figura 1 representa la estructura general de una unión en guía de onda. Tanto las guías de entrada como las paredes de la unión se consideran de conductor perfecto. Los planos de referencia S_g ($g=1, \dots, G$) en cada guía se definen en superficies transversales a la dirección de propagación \hat{n}_g , que se toma entrante al volumen. Lo único que se presupone del interior del dispositivo es el carácter lineal, isótropo y homogéneo del medio, sin la presencia de fuentes.

Los accesos a la unión son guías de onda homogéneas y por tanto el campo transversal total en cada uno de los planos de referencia S_g se puede desarrollar en serie de un conjunto

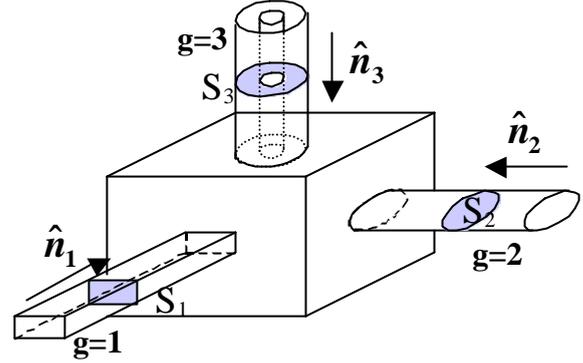


Figura 1. Esquema de una unión en guía de onda

ortogonal de modos TE, TM y TEM:

$$\bar{\mathbf{E}}_i^{(g)} = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(g)} + b_i^{(g)}) \bar{\mathbf{e}}_i^{(g)} \quad \bar{\mathbf{H}}_i^{(g)} = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(g)} - b_i^{(g)}) \bar{\mathbf{h}}_i^{(g)} \quad (1)$$

Si se trunca el desarrollo (1) en cada guía a un número finito de términos, la MDG, $\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$, relaciona el vector formado por todas las amplitudes reflejadas ($b_i^{(g)}$) e incidentes ($a_i^{(g)}$) en la unión.

1.2. Normalización y ortogonalidad de los modos

La MDG se define sobre el conjunto de modos que aparece en la expresión (1). Si se elige otro conjunto de modos, la nueva MDG será diferente y tendrá propiedades también diferentes. Este hecho estará directamente relacionado con las matrices de normalización que a continuación se definen:

$$\mathbf{Q} = \text{diag} [\mathbf{Q}_g] \quad Q_{ij}^{(g)} = \iint_{S_g} (\bar{\mathbf{e}}_i^{(g)} \times \bar{\mathbf{h}}_j^{(g)}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}_g \quad (2)$$

$$\mathbf{P} = \text{diag} [\mathbf{P}_g] \quad P_{ij}^{(g)} = \iint_{S_g} (\bar{\mathbf{e}}_i^{(g)} \times \bar{\mathbf{h}}_j^{(g)*}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}_g$$

Ambas matrices son diagonales debido a la ortogonalidad de los modos y están relacionadas por:

$$P_{ii}^{(g)} = z_i^{(g)} | Q_{ii}^{(g)} |, \quad z_i^{(g)} = \begin{cases} 1 & \text{modo prop.} \\ +j & \text{modo TE evan.} \\ -j & \text{modo TM evan.} \end{cases}$$

Los elementos de \mathbf{Q} pueden ser complejos, mientras que los de \mathbf{P} , puesto que representan la potencia compleja de cada modo, o son reales puros (propagantes), o son imaginarios puros (evanescentes). Como a continuación se verá, \mathbf{Q} es un grado de libertad del que se dispone para que la MDG tenga determinadas propiedades.

2. PROPIEDADES DE LA MDG A PARTIR DE TEOREMAS ELECTROMAGNÉTICOS

Para obtener las propiedades se aplican los Teoremas de Reciprocidad, Poynting y Autorreacción [2] a un superficie S_i , que engloba a la unión y que pasa por todos los planos de referencia.

Sean A y B dos soluciones distintas de las ecuaciones de Maxwell en el volumen de la unión, cada una correspondiente a unas amplitudes incidentes diferentes. Si se aplica el Teorema de Reciprocidad a la superficie S_i y se utiliza la definición de la MDG se obtiene:

$$\frac{1}{2} \iint_{S_i} (\bar{\mathbf{E}}^A \times \bar{\mathbf{H}}^B - \bar{\mathbf{E}}^B \times \bar{\mathbf{H}}^A) \cdot d\bar{\mathbf{S}} = (\mathbf{a}^A)^T \{ \mathbf{S}^T \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{S} \} \mathbf{a}^B = 0$$

Puesto que el teorema se debe verificar para dos vectores cualesquiera de amplitudes incidentes, se concluye:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Procediendo de manera similar para el teorema de Poynting:

$$\frac{1}{2} \iint_{S_i} (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^*) \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^H \mathbf{M} \mathbf{a} = P_{dis} + 2j \boldsymbol{\omega} (W_h - W_e)$$

con (superíndice H indica la traspuesta conjugada):

$$\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{S})^H \mathbf{P} (\mathbf{I} + \mathbf{S})$$

Si \mathbf{M} se descompone en parte hermítica y en parte antihermítica, y la matrices se dividen en modos propagantes (subíndice p) y evanescentes (subíndice v) se puede separar el término de potencia disipada y el término de energías almacenadas. En concreto, si la unión no tiene pérdidas debe cumplirse:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_p - \mathbf{S}_{pp}^H \mathbf{P}_p \mathbf{S}_{pp} & -\mathbf{S}_{vp}^H \mathbf{P}_v - \mathbf{S}_{pp}^H \mathbf{P}_p \mathbf{S}_{pv} \\ \mathbf{P}_v \mathbf{S}_{vp} - \mathbf{S}_{pv}^H \mathbf{P}_p \mathbf{S}_{pp} & -\mathbf{S}_{vv}^H \mathbf{P}_v + \mathbf{P}_v \mathbf{S}_{vv} - \mathbf{S}_{pv}^H \mathbf{P}_p \mathbf{S}_{pv} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4)$$

La normalización habitual de los modos que aparecen en (1) se expresa como $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$. Bajo esta normalización (3) y (4) muestran que la MDG debe ser simétrica y que la submatriz de modos propagantes \mathbf{S}_{pp} debe ser unitaria. Este resultado clásico de teoría de circuitos no se cumple bajo otras normalizaciones. De hecho, la matriz total, la MDG, no es unitaria [3], y sólo bajo ciertas normalizaciones (entre las que se encuentra $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$) es simétrica.

Cuando la unión bajo estudio consiste en una superficie (típicamente una discontinuidad entre dos guías de onda), además de los teoremas anteriores se puede aplicar el Teorema de Autorreacción. Escribiendo el teorema en función de la MDG:

$$\frac{1}{2} \iint_{S_i} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \{ (\mathbf{I} - \mathbf{S}^T) \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \mathbf{S}) \} \mathbf{a} = 0$$

se llega a la conclusión de que la matriz entre corchetes debe anularse. Si se anula, también su parte simétrica y antisimétrica deben hacerlo por separado:

$$\mathbf{Q} - \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Q} \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{S} \mathbf{S} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{S} = \mathbf{S}^{-1} \quad (5)$$

Por tanto, independientemente de la normalización, la MDG de una discontinuidad es siempre igual a su inversa.

3. PROPIEDADES DE LA MDG DE UNA DISCONTINUIDAD OBTENIDA POR ANÁLISIS MODAL

El método de adaptación modal (MM) es una técnica que se utiliza para resolver el problema de una discontinuidad transversal entre dos guías de onda. Se realiza un desarrollo modal como el mostrado en (1) para cada una de las guías, se imponen las condiciones de contorno y mediante un método de Galerkin se obtiene un sistema lineal. Al resolverlo se obtiene la MDG [4]:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{F} \mathbf{X}_1 - \mathbf{I} & \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{F} \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{F} \mathbf{X}_1 & \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{F} \mathbf{X}_2 - \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (6)$$

donde

$$\mathbf{F} = 2(\mathbf{X}_1 \mathbf{Q}_1^{-1} \mathbf{X}_1^T + \mathbf{X}_2 \mathbf{Q}_2^{-1} \mathbf{X}_2^T)^{-1}$$

y $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ son las matrices de (2) para cada una de las guías $g=1,2$ de la discontinuidad.

Los elementos de $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ representan integrales de productos de modos de las guías del problema. Podría pensarse que sólo en el caso de estar calculados correctamente, la MDG de (6) va a verificar (3),(4) y (5). Esto no es cierto. Por la forma algebraica de construir la MDG se puede comprobar que las operaciones de (6) siempre conducen a una MDG que verifica (3),(5). Esto se cumple aunque las matrices que aparecen en (6) se calculen erróneamente, independientemente del número de modos utilizado en el desarrollo (1) y sin utilizar ninguna información electromagnética.

4. CONCLUSIONES

La MDG de una unión en guía de ondas tiene una serie de propiedades que se han demostrado a partir de teoremas electromagnéticos. Estas propiedades difieren de las clásicas de teoría de circuitos, porque en la formulación se incluyen modos evanescentes. Puesto que la MDG normalmente se obtiene mediante técnicas numéricas, podría plantearse comprobar un determinado resultado con el cumplimiento de las propiedades expuestas. Se ha mostrado que en el caso de MM esta comprobación no garantiza su validez.

REFERENCIAS

- [1] C.G. Montgomery, R.H. Dicke, and E.M. Purcell, "Principles of Microwave circuits", IEE Electromagnetic waves series 25, 1987 Edition.
- [2] H. Haskal, "Matrix Description of Waveguide Discontinuities in the presence of evanescent modes", IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., pp. 184-188, March 1964.
- [3] A. Morini, T.Rozzi, "On the Definition of the Generalized Scattering Matrix of a lossless multiport", IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech., 49(1), pp. 160-165, January 2001.
- [4] Juan E. Page de la Vega, Jaime Esteban Marzo, "Formulación mediante ajuste de modos del problema de la discontinuidad transversal general", X Simp. Nacional U.R.S.I., Valladolid, España, pp. 651-654, Sept. 1995.