ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS RESONANTES ELECTROMAGNÉTICAS COMBINANDO EL MÉTODO FDTD CON EL ALGORITMO DE GOERTZEL

Sanchís, R.; Soriano A. ; Navarro, E.A.; Navasquillo J.

Grup d'Electromagnetisme i Ones
Dpt. Física Aplicada, Universitat de València
raul.sanchis@uv.es; enrique.navarro@uv.es;

RESUMEN

El algoritmo de Goertzel, comparado con el cálculo directo de la *DFT* este algoritmo utiliza la mitad de multiplicaciones reales, el mismo número de sumas y requiere aproximadamente *1/N* del número de evaluaciones trigonométricas. La gran ventaja del algoritmo es precisamente la reducción de las evaluaciones trigonométricas sobre el cálculo directo de la *DFT*. La carga computacional para el algoritmo de Goertzel es del orden de N^2, aunque con un factor de proporcionalidad menor que para la *DFT* directa, siendo por tanto más eficiente en aplicaciones específicas.

ABSTRACT

The Goertzel algorithm calculates the Discrete Fourier Transform using a IIR filter. By comparing with the direct calculation of the DFT, the Goertzel algorithm uses half the number of numerical operations with approximately 1/N trigonometric calculations. The advantage of the Goertzel algorithm is specially the reduction in the trigonometric calculations with respect the DFT. The computational burden of Goertzel's algorithm is N^2, with a lower proportionality factor than thew DFT, therefore is more efficient under specific applications.

1. EL ALGORITMO

Básicamente, el problema del cálculo de la *DFT* es evaluar la secuencia $\{X(k)\}$ de N números complejos dada la secuencia de datos $\{x(n)\}$ de longitud N según la fórmula

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot W_N^{kn}$$

para $0 \le k \le N-1$ y donde $W_N = exp(-j2\pi/N)$

En el caso más general, se supone que la secuencia de datos $x(n)$ también es compleja. Para cada valor de k, el cálculo directo de $X(k)$ supone realizar N multiplicaciones complejas ($4N$ multiplicaciones reales) y $N-1$ sumas complejas ($4N-2$ sumas reales). En consecuencia, para calcular los N valores de la *DFT* se necesitan N^2 multiplicaciones complejas y N^2-N sumas complejas. El cálculo directo de la *DFT* es básicamente ineficiente a causa, fundamentalmente, de que no explota las propiedades de simetría y periodicidad del factor de fase W_N. Los algoritmos computacionalmente eficientes, conocidos en general como algoritmos *FFT*, generalmente utilizan estas dos propiedades básicas del factor de fase.

El algoritmo de Goertzel explota la periodicidad de los factores de fase $\{W_n^k\}$ y nos permite expresar como ya hemos dicho, el cálculo de la *DFT* como una operación de filtrado. Dado que $W_n^{-kN} = e^{j2\pi k} = 1$, podemos multiplicar la *DFT* por este factor y encontrar que:

$$X(k) = W_N^{-Nk} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot W_N^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot W_N^{-k(N-m)}$$

Podemos observar que esta ecuación tiene la forma de una convolución. De hecho, si definimos la secuencia $y_k(n)$ como

$$y_k(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \cdot W_N^{-k(n-m)}$$

entonces está claro que $y_k(n)$ es la convolución de la secuencia de entrada $x(n)$, de longitud N, como un filtro que tiene por respuesta impulsional

$$h_k(n) = W_N^{-kn} u(n)$$

La salida de este filtro en $n=N$ da el valor de la *DFT* a la frecuencia $w_k=2\pi k/N$. Esto es,

$$X(k) = y_k(n)\big|_{n=N}$$

como puede verificarse comparando las dos primeras ecuaciones del desarrollo.

El filtro con respuesta impulsional $h_k(n)$ tiene por función de transferencia

$$H_k(z) = \frac{1}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \qquad (1)$$

Este filtro tiene un polo sobre la circunferencia unidad a la frecuencia $w_k=2\pi k/N$. Por tanto, toda la *DFT* puede calcularse pasando el bloque de datos de entrada a través de un banco de N filtros de un polo (resonadores) en paralelo, donde cada filtro tiene su polo a la frecuencia correspondiente de la *DFT*.

Este método para el cálculo de la DFT de una serie representa el algoritmo de Goertzel de primer orden.

El término $y_k(n)$ también se puede calcular recursivamente como una ecuación en diferencias.

$$y_k(n) = W_N^{-k} y_k(n-1) + x(n)$$

$$y_k(-1) = 0 \tag{8}$$

La salida deseada es $X(k)=y_k(N)$, para $k=0,1,...,N-1$. Para realizar este cálculo podemos evaluar y almacenar cada vez los factores de fase W_N^{-k}. Las multiplicaciones y sumas complejas inherentes a la anterior ecuación pueden evitarse combinando las parejas de resonadores que tienen polos complejos conjugados. Esto nos lleva a filtros de dos polos con funciones de transferencia de la forma

$$H_k(z) = \frac{1 - W_N^{-k} z^{-1}}{1 - 2\cos(2\pi k / N) z^{-1} + z^{-2}} \tag{9}$$

El algoritmo de Goertzel es particularmente atractivo, cuando la DFT que se necesita calcular el número de armónicos *M* es relativamente pequeño, es decir, cuando $log_2 N \geq M$. En otros casos, el algoritmo para la FFT es un método más eficiente. No obstante, a veces el seguimiento de la evolución de la convergencia de series temporales producidas por métodos como FDTD resulta conveniente realizarlo con el algoritmo de Goertzel.

2. APLICACIÓN CON FDTD

La utilidad del algoritmo se pone de manifiesto cuando lo

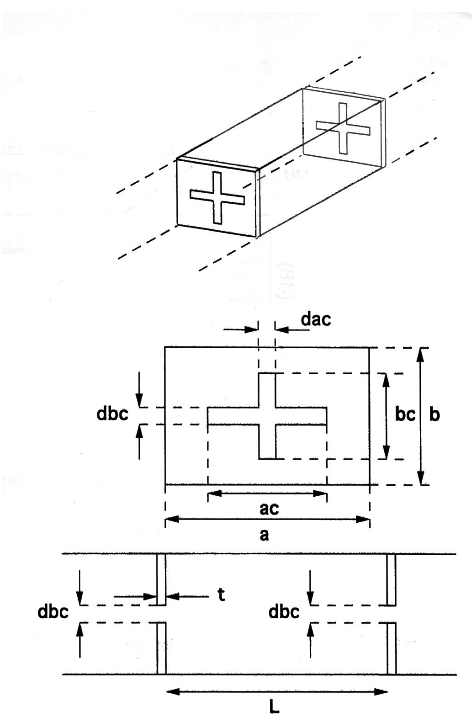

Figura 1

combinamos con la técnica de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD), para el análisis de filtros en guía, que en el caso de la simulación FDTD, necesariamente requieren de un número excesivo de iteraciones temporales con el consiguiente uso de recursos de ordenador. La utilización de algoritmos de predicción permite reducir el número de iteraciones. El algoritmo de Goertzel simplifica las operaciones de la DFT y permite determinar la respuesta de la estructura, si a priori se conoce la banda de utilización. Este el es caso de los filtros con doble iris, en los que se intuye una banda muy estrecha sobre la que aplicar el algoritmo (Figura 1).

La respuesta a una Gaussiana temporal de un filtro de estas características se presenta en la Figura 2. Donde se aprecia la convergencia en función del número de puntos temporales. Como la respuesta del filtro solo es crítica –numéricamente hablando- en un entorno muy estrecho alrededor de su frecuencia de resonancia, el algoritmo de Goertzel se restringe a ese entorno, donde la convergencia se ve afectada por motivos numéricos. El ahorro de tiempo de CPU en estos cálculos es considerable respecto de la aplicación de la DFT en la misma banda y la FFT en toda la banda.

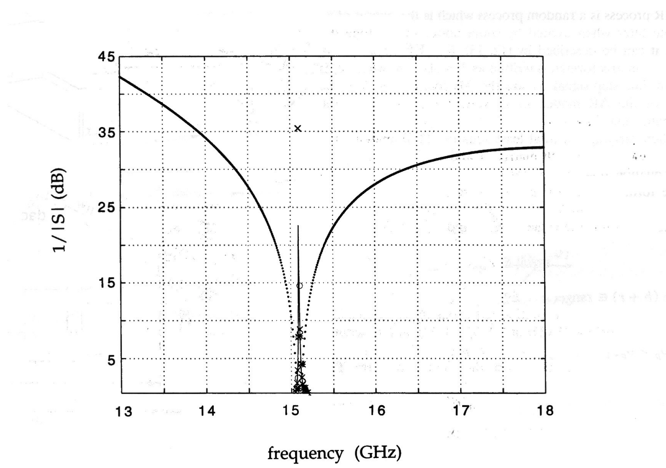

Figura 2

3. CONCLUSIONES

Se ha presentado el algoritmo de Goertzel y, su utilidad en simulaciones FDTD de estructuras resonantes. En estas aplicaciones se puede ahorrar un porcentaje elevado de tiempo de cálculo. Las ventajas de su aplicación radican en sus características intrínsecas de filtro en tiempo real.

4. REFERENCIAS

[1] G. Goertzel, 1958: “An algorithm for the evaluation of finite trigonometric series”, Amer. Math. Monthly, 65, pp. 34-35.

[2] C.S. Burrus, and T.W. Parks, 1985: *DFT/FFT and Convolution Algorithms*, John Wiley and Sons..

[3] C. Wu, E.A. Navarro, and J. Litva, 1996: “Combination of finite impulse response neural network technique with FDTD method for simulation of electromagnetic problems”, Electron Lett, pp. 1112-1132.

[4] K. L. Shlager, and J. B. Schneider, 1998: “A Survey of the Finite-Difference Time-Domain Literature”, In *Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*, A. Taflove editor, Artech House.